

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
Кафедра геометрии

Е.Н. СОСОВ

Введение в метрическую геометрию
и ее приложения

КАЗАНЬ – 2015

УДК 515.124.4

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО
“Казанский (Приволжский) федеральный университет”*

*Учебно-методической комиссии Института математики и механики
Протокол No. 9 от 18 июня 2015 г.*

*заседания кафедры геометрии
Протокол No. 8 от 11 июня 2015 г.*

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, профессор **В.В. Шурыгин**

Рецензент
кандидат физ.-мат. наук, доцент К(П)ФУ **П.Н. Иваньшин**

Сосов Е.Н.

Введение в метрическую геометрию и ее приложения. Учебно-методическое пособие /Е.Н. Сосов — Казань: Казан. ун-т, 2015. - 98 с.

Пособие содержит введение в метрическую геометрию и ее приложения.
Предназначено для студентов-математиков III-IV курсов.

УДК 515.124.4

© Сосов Е.Н., 2015
© Казанский университет, 2015

Оглавление

Введение	5
0.1 Простой путь. Простая дуга. Длина пути. Эквивалентные пути. Кривая в метрическом пространстве	6
0.2 Кривая Коха. Свойства длины пути. Длина дуги, как пара- метр. Характеризация функции длины дуги	9
0.3 Дифференцируемые пути в евклидовом пространстве. Пространство путей	13
0.4 Теорема Арцела-Асколи. Существование кратчайшего пути	18
0.5 Липшицевы отображения, подобия и изометрические отображения метрических пространств. Расстояние по Липшицу	21
0.6 Пространство с внутренней метрикой. Сегмент. Геодезиче- ское пространство	25
0.7 Геодезическая кривая, луч, прямая. Выпуклость метриче- ского пространства по Менгеру. Теорема Хопфа-Ринова- Кон-Фоссена	29
0.8 Геодезическая выпуклость и выпуклость по Менгеру. Произведения метрических пространств	33
0.9 Отображения, неувеличивающие (сохраняющие) длины кривых. Нерастягивающие отображения. Отображения уменьшающие (неуменьшающие) расстояние	37
0.10 Изометрии компактных пространств	41
0.11 Локальные изометрии. Фактор-пространство	46
0.12 Однородные пространства. Метрика Буземана на группе подобий метрического пространства	51
0.13 Отклонение и метрика Хаусдорфа	56

0.14	Расстояние по Громову–Хаусдорфу. Метрика Буземана . . .	62
0.15	Верхний угол. Угол. Пространство направлений. Конус	69
0.16	β -непрерывность многозначного отображения метрических пространств. Метрическая δ -проекция. Множество существования и чебышевское множество. Аппроксимативная компактность	71
0.17	Непрерывность метрической δ -проекции и β -непрерывность обратного отображения	74
0.18	Метрическая δ -проекция и ε -квазирешение операторного уравнения первого рода	77
0.19	Наилучшее аппроксимирующее множество. Относительные чебышевский центр и чебышевский радиус. Множество диаметральных точек непустого ограниченного множества метрического пространства	80
0.20	Наилучшая N -сеть непустого ограниченного множества со- пряженного пространства	84
0.21	Достаточные условия существования и единственности чебышевского центра непустого ограничен- ного множества	86
0.22	Наилучшие аппроксимирующие компакты и чебышевские центры выпуклых множеств специальных геодезических пространств	89
0.23	Непрерывность метрической проекции. Свойства близкие к β -непрерывности множества всех отно- сительных чебышевских центров, множества диаметральных точек и наилучших аппроксими- рующих компактов	91

Введение

Данное учебно-методическое пособие включает минимум вводного курса и некоторые приложения метрической геометрии. Оно предназначено для студентов-математиков III-IV курсов и рассчитано на 36 часов аудиторной нагрузки с учетом выбора тем преподавателем.

Метрическая геометрия имеет много взаимосвязей с нерегулярной римановой геометрией, гиперболическими группами, теорией фракталов, теорией приближений, геометрической теорией меры, нелинейным функциональным анализом, теорией некорректных задач и дискретной математикой. Эти взаимосвязи поддерживают актуальность метрической геометрии и постоянный приток в нее новых задач. Все задачи в пособии элементарны и служат для контроля правильного усвоения основных понятий.

В пособии приняты следующие обозначения.

$|xy| = \rho(x, y)$ — расстояние между точками x, y в метрическом пространстве (X, ρ) .

⊙ — символ начала (конца) доказательства.

Т.1.2 (Л.1.2, З.1.2, Пр.1.2, С.1.2) обозначает теорему 2 (лемму 2, задачу 2, пример 2, следствие 2) лекции 1.

0.1 Простой путь. Простая дуга. Длина пути. Эквивалентные пути. Кривая в метрическом пространстве

Непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ называется *путем* (*параметризованной кривой*) с концами $\gamma(a), \gamma(b)$. Путь называется замкнутым путем, если $\gamma(a) = \gamma(b)$. Путь с концами x, y обозначим $\gamma_{x,y}$.

Инъективный путь называется *простым* (*жордановым*) *путем*.

Множество $\hat{\gamma} \subset X$ называется *простой дугой*, если найдется такой простой путь $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, что $\hat{\gamma} = \gamma([a, b])$. $\gamma(a), \gamma(b)$ — концы дуги. Остальные точки называются *внутренними точками* простой дуги.

Множество $\Gamma \subset X$ называется *простой замкнутой кривой*, если оно является образом при некотором гомеоморфизме окружности $S(O, 1) \subset \mathbb{R}^2$ в X .

Множество $\Gamma \subset X$ называется *простой кривой*, если оно замкнуто и является либо простой замкнутой кривой, либо образом при некотором гомеоморфизме произвольного интервала $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$.

Конечное упорядоченное подмножество $\sigma \subset [a, b]$, содержащее a, b , называется *разбиением отрезка* $[a, b]$. Если $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, то $\sigma = (t_i)_{i=0, \dots, n}$, $n + 1 = \text{card}(\sigma)$ — *длина разбиения*, $|\sigma| = \max\{t_{i+1} - t_i : i \in \{0, \dots, n-1\}\}$ — *модуль разбиения*.

Полной вариацией пути $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ относительно разбиения $\sigma = (t_i)_{i=0, \dots, n}$ называется величина

$$V_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})|.$$

Длиной пути $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ называется величина

$L(\gamma) = \sup\{V_\sigma(\gamma) : \sigma\}$. Путь γ — *спрямляемый*, если $L(\gamma) < +\infty$.

Метрическое пространство называется *линейно* (*метрически*) *связным*, если для любых двух точек из этого пространства найдется (спрямляемый) путь с концами в этих точках.

Пр.1.1 Путь $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(t) = t \sin(1/t)$, если $t \in (0, 1]$, и $\gamma(0) = 0$, является неспрямляемым.

⊙ Пусть для каждого $n \geq 2$ $\sigma_n = \{0, 1\} \cup \{\frac{2}{\pi(2i+1)} : i \in \{0, 1, \dots, n\}\}$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } V_{\sigma_n}(\gamma) &= \left| \frac{2}{\pi(2n+1)} \sin(\pi(2n+1)/2) \right| + \\ &\sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{2}{\pi(2i+3)} \sin(\pi(2i+3)/2) - \frac{2}{\pi(2i+1)} \sin(\pi(2i+1)/2) \right| + \left| \frac{2}{\pi} - \sin 1 \right| \geq \\ &\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{\pi(2i+3)} + \frac{2}{\pi(2i+1)} \right) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi(2n+1)} + \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, путь γ неспрямляемый, т.к. правая часть полученного неравенства стремится к ∞ при $n \rightarrow \infty$. ⊙

Пути $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, $\gamma_1 : [c, d] \rightarrow X$ называются *эквивалентными путями*, если найдется такое (в общем случае многозначное) монотонное, сюръективное отображение $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$, что для каждого $t \in [c, d]$ $\gamma_1(t) = \gamma(\psi(t))$. Отображение ψ называется *заменой параметра*. (монотонность многозначного отображения понимается так: если $t < u$, то каждый элемент множества $\psi(t)$ не больше (или не меньше) каждого элемента множества $\psi(u)$).

Кривой с концами в точках x, y называется класс эквивалентности путей с теми же концами.

Л.1.1.1 Длины эквивалентных путей равны.

⊙ 1. С каждым разбиением $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ отрезка $[a, b]$ свяжем разбиение

$$\hat{\sigma} = (\hat{t}_i)_{i=\overline{0,n}}$$

отрезка $[c, d]$, выбрав точки $\hat{t}_i \in \psi^{-1}(t_i)$ ($i = \overline{0, n}$). Тогда

$$V_{\hat{\sigma}}(\gamma_1) = V_{\sigma}(\gamma) \Rightarrow L(\gamma_1) \geq V_{\sigma}(\gamma) \Rightarrow L(\gamma_1) \geq L(\gamma).$$

2. Пусть $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0,n}}$ разбиение отрезка $[c, d]$. Выберем такое разбиение $\hat{\sigma} \subset \psi(\sigma)$, что $\hat{t}_i \in \psi(t_i)$ ($i = \overline{0, n}$). Тогда

$$V_{\sigma}(\gamma_1) = V_{\hat{\sigma}}(\gamma) \Rightarrow V_{\sigma}(\gamma_1) \leq L(\gamma) \Rightarrow L(\gamma_1) \leq L(\gamma). \odot$$

Т.1.1.1 Для любого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ $L(\gamma) = \lim_{|\sigma| \rightarrow 0} V_{\sigma}(\gamma)$.

⊙ Пусть $n > 1$, M произвольное неотрицательное вещественное число, удовлетворяющее неравенству $M < L(\gamma)$. Нам достаточно доказать следующее: найдется такое $\eta > 0$, что для любого разбиения σ отрезка $[a, b]$, удовлетворяющего неравенству $|\sigma| < \eta$, выполняются неравенства

$$M \leq V_\sigma(\gamma) \leq L(\gamma).$$

Правое неравенство следует из определения длины пути γ . Выберем

$$0 < \varepsilon < (L(\gamma) - M)/2$$

и такое разбиение $\tau = (t_i)_{i=0, n}$ отрезка $[a, b]$, что

$$M + \varepsilon < V_\tau(\gamma).$$

В силу равномерной непрерывности пути γ , найдется такое

$$0 < \eta < \frac{1}{4} \min\{t_{i+1} - t_i : i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}, \quad \text{что} \quad |\gamma(u)\gamma(v)| \leq \frac{\varepsilon}{2n}$$

для любых $u, v \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|u - v| \leq \eta$. Фиксируем η и пусть σ разбиение отрезка $[a, b]$, удовлетворяющее неравенству $|\sigma| < \eta$. Пусть для каждого $i \in \{0, \dots, n-1\}$ вершина $\hat{t}_i \in \sigma$ (соответственно $\tilde{t}_i \in \sigma$), ближайшая из σ к t_i , и такая, что

$$\hat{t}_i \leq t_i \quad (t_i < \tilde{t}_i).$$

Тогда, в силу неравенства $|\sigma| < \eta$, получим для каждого $i \in \{0, \dots, n-1\}$

$$t_i < \tilde{t}_i < \hat{t}_{i+1} \leq t_{i+1}.$$

Рассмотрим разбиение $\sigma \cup \tau$ отрезка $[a, b]$. Тогда

$$V_{\sigma \cup \tau}(\gamma) - V_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} (|\gamma(t_i)\gamma(\hat{t}_i)| + |\gamma(t_i)\gamma(\tilde{t}_i)| - |\gamma(\hat{t}_i)\gamma(\tilde{t}_i)|) \leq$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (|\gamma(t_i)\gamma(\hat{t}_i)| + |\gamma(t_i)\gamma(\tilde{t}_i)|) \leq 2n \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$V_\tau(\gamma) \leq V_{\sigma \cup \tau}(\gamma) \leq V_\sigma(\gamma) + \varepsilon$$

и $M \leq V_\sigma(\gamma)$. ⊙

3.1.1 Если $\Gamma \in X$ — простая замкнутая кривая, то найдется такой замкнутый путь $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, что $\gamma([a, b]) = \Gamma$ и $\gamma(u) \neq \gamma(v)$ для всех $u, v \in [a, b]$, $u \neq v$, $\{u, v\} \neq \{a, b\}$.

3.1.2 Для каждого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ имеет место неравенство $|\gamma(a)\gamma(b)| \leq L(\gamma)$.

3.1.3 Пусть $\gamma_{x,y} : [0, 1] \rightarrow X$ — аффинный путь в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$, т.е. $\gamma(t) = (1-t)x + ty$. Тогда $L(\gamma) = \|x - y\|$.

3.1.4 Путь γ из примера 1 есть равномерный предел последовательности спрямляемых путей $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow X$, $\gamma_n(t) = \gamma(t)$, если $t \in [\frac{1}{n\pi}, 1]$, и $\gamma_n(t) = 0$, если $t \in [0, \frac{1}{n\pi}]$. Таким образом, равномерный предел последовательности спрямляемых путей в общем случае не является спрямляемым путем.

3.1.5 Бинарное отношение, введенное на множестве всех путей пространства X , является отношением эквивалентности.

3.1.6 Для каждого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ найдется эквивалентный путь $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$.

0.2 Кривая Коха. Свойства длины пути. Длина дуги, как параметр. Характеризация функции длины дуги

Пр.2.1 Пусть путь $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ является равномерным пределом последовательности путей $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($n \in \{0, 1, \dots\}$), определяемых индуктивно следующим образом:

- а) $\gamma_0(t) = (t; 0)$ для любого $t \in [0, 1]$;
- б) путь γ_n является аффинным на каждом интервале разбиения

$$\sigma_n = \left\{ \frac{i}{3^n} : i = 0, 1, \dots, 3^n \right\}$$

отрезка $[0, 1]$ для каждого $n \in \{0, 1, \dots\}$;

в) для каждого $n \in \{0, 1, \dots\}$ кусочно-линейный путь γ_{n+1} получается из γ_n разрезанием каждого отрезка I разбиения σ_n на три части равной длины и изменением пути γ_n на средней части J следующим образом:

отрезок $\gamma_n(J)$ заменяется на ломаную, состоящую из боковых сторон равностороннего треугольника с основанием $\gamma_n(J)$.

Из построения ясно, что для каждого $n \in \{0, 1, \dots\}$ $L(\gamma_{n+1}) = \frac{4}{3}L(\gamma_n)$. Тогда

$$L(\gamma) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\sigma_n}(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\sigma_n}(\gamma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n} = \infty.$$

Следовательно, определяющий кривую Коха путь γ , является неспрямым.

Т.2.1(аддитивность длины пути) Для любого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ и для каждого $c \in [a, b]$ $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a, c]}) + L(\gamma|_{[c, b]})$.

⊙ Выберем такую последовательность разбиений (σ_n) ($n \in \{1, 2, \dots\}$) отрезка $[a, b]$, что

$$c \in \sigma_n, \quad |\sigma_n| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Пусть для каждого $n \in \{1, 2, \dots\}$

$$\hat{\sigma}_n = \sigma_n \cap [a, c], \quad \tilde{\sigma}_n = \sigma_n \cap [c, b].$$

Тогда

$$V_{\sigma_n}(\gamma) = V_{\hat{\sigma}_n}(\gamma|_{[a, c]}) + V_{\tilde{\sigma}_n}(\gamma|_{[c, b]}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{\sigma}_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{\sigma}_n| = 0.$$

Из теоремы 1.1 получим

$$L(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\sigma_n}(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} (V_{\hat{\sigma}_n}(\gamma|_{[a, c]}) + V_{\tilde{\sigma}_n}(\gamma|_{[c, b]})) = L(\gamma|_{[a, c]}) + L(\gamma|_{[c, b]}). \odot$$

Т.2.2 Для каждого спрямляемого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ функция $\psi : [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)]$, $\psi(t) = L(\gamma|_{[a, t]})$ является неубывающей непрерывной сюръекцией.

⊙ Из аддитивности длины пути следует, что функция ψ неубывающая. Фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 1.1 и равномерной непрерывности γ , найдется $\eta > 0$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) $L(\gamma) - V_\sigma(\gamma) < \varepsilon$ для каждого разбиения σ отрезка $[a, b]$ такого, что $|\sigma| < \eta$;

2) $|\gamma(u)\gamma(v)| < \varepsilon$ для любых $u, v \in [a, b]$ таких, что $|u - v| < \eta$.

Пусть $u, v \in [a, b]$ и разбиение σ отрезка $[a, b]$ такие, что

$$v - u < \eta, \quad |\sigma| < \eta, \quad \sigma \cap [u, v] = \{u, v\}.$$

Положим $\sigma_1 = \sigma \cap [a, u]$ и $\sigma_2 = \sigma \cap [v, b]$. Тогда, используя аддитивность длины пути и условия 1, 2, получим

$$L(\gamma|_{[a,u]}) + L(\gamma|_{[u,v]}) + L(\gamma|_{[v,b]}) = L(\gamma) < V_\sigma(\gamma) + \varepsilon =$$

$$V_{\sigma_1}(\gamma|_{[a,u]}) + |\gamma(u)\gamma(v)| + V_{\sigma_2}(\gamma|_{[v,b]}) + \varepsilon < L(\gamma|_{[a,u]}) + \varepsilon + L(\gamma|_{[v,b]}) + \varepsilon.$$

Следовательно, $L(\gamma|_{[u,v]}) < 2\varepsilon$. Снова используя аддитивность длины пути, получим отсюда непрерывность функции ψ . \odot

Пусть $a \leq c \leq b$. Произведением (конкатенацией) путей

$\gamma_1 : [a, c] \rightarrow X$, $\gamma_2 : [c, b] \rightarrow X$, удовлетворяющих условию $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$, называется такой путь $\gamma_1 * \gamma_2 : [a, b] \rightarrow X$, что $\gamma_1 * \gamma_2(t) = \gamma_1(t)$ при $a \leq t \leq c$, $\gamma_1 * \gamma_2(t) = \gamma_2(t)$ при $c \leq t \leq b$.

Т.2.3 (Характеризация функции длины дуги) Пусть C множество всех путей в пространстве (X, ρ) и $L : C \rightarrow \mathbb{R}_+$ — функция, сопоставляющая каждому пути его длину. Тогда L — наименьшая функция из функций $F : C \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

- (i) для каждого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ $F(\gamma) \geq |\gamma(a)\gamma(b)|$;
- (ii) $F(\gamma_1 * \gamma_2) = F(\gamma_1) + F(\gamma_2)$.

\odot Пусть функция $F : C \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям (i), (ii) и $\sigma = (t_i)_{i=0, \overline{n}}$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда

$$F(\gamma) \geq \sum_{i=0}^{n-1} F(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}) \geq \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})| \geq V_\sigma(\gamma).$$

Следовательно, $F(\gamma) \geq L(\gamma)$. Осталось заметить, что в силу задач 1.2, 2.1, функция L удовлетворяет условиям (i), (ii). \odot

Говорят, что спрямляемый путь $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ параметризован длиной дуги или имеет натуральную параметризацию (параметризован с постоянной скоростью $v > 0$), если для любых t, t_1 , удовлетворяющих условию $a \leq t \leq t_1 \leq b$, верно равенство

$$L(\gamma|_{[t, t_1]}) = t_1 - t \quad (L(\gamma|_{[t, t_1]}) = v(t_1 - t)).$$

Т.2.4 Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ спрямляемый путь. Тогда путь

$$\lambda : [0, L(\gamma)] \rightarrow X, \quad \lambda(u) = \gamma(t),$$

где $\psi(t) = L(\gamma|_{[a,t]}) = u$, эквивалентен пути γ и параметризован длиной дуги.

⊙ В силу теоремы 2.2 функция ψ является непрерывной функцией на $[a, b]$. Следовательно, для каждого $u \in [0, L(\gamma)]$ найдется такое $t \in [a, b]$, что $\psi(t) = u$. Пусть $t, \hat{t} \in [a, b]$ такие, что

$$t \leq \hat{t}, \quad L(\gamma|_{[a,t]}) = L(\gamma|_{[a,\hat{t}]}) .$$

Тогда в силу аддитивности длины дуги получим

$$L(\gamma|_{[t,\hat{t}]}) = L(\gamma|_{[a,\hat{t}]}) - L(\gamma|_{[a,t]}) = 0 .$$

Следовательно, отображение ψ постоянно на отрезке $[t, \hat{t}]$ и $\gamma = \lambda \circ \psi$. Пусть $v \in [0, L(\gamma)]$ и $\tilde{t} \in [a, b]$ такие, что

$$u \leq v \quad L(\gamma|_{[a,\tilde{t}]}) = v .$$

Тогда

$$|\lambda(u)\lambda(v)| = |\gamma(t)\gamma(\tilde{t})| \leq L(\gamma|_{[t,\tilde{t}]}) = L(\gamma|_{[a,\tilde{t}]}) - L(\gamma|_{[a,t]}) = v - u .$$

Следовательно, отображение λ нестягивающее и является путем, эквивалентным пути $\gamma = \lambda \circ \psi$. Кроме того, учитывая лемму 1.1, получим

$$L(\lambda|_{[u,v]}) = L((\lambda \circ \psi)|_{[t,\tilde{t}]}) = L(\gamma|_{[t,\tilde{t}]}) = L(\gamma|_{[a,\tilde{t}]}) - L(\gamma|_{[a,t]}) = v - u .$$

Таким образом, путь λ параметризован длиной дуги. ⊙

Говорят, что путь $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, где $a < b$, параметризован пропорционально длине дуги, если или γ — постоянный путь, или найдется такой натурально параметризованный путь $\hat{\gamma} : [c, d] \rightarrow X$, что $\gamma = \hat{\gamma} \circ \psi$ и $\psi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ — единственный аффинный гомеоморфизм, т.е.

$$\psi(t) = \frac{(d-c)t + bc - ad}{b-a} .$$

3.2.1 Имеет место равенство $L(\gamma_1 * \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$.

3.2.2 Если $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ и пути γ_1, γ_2 параметризованы длиной дуги, то путь γ параметризован длиной дуги.

3.2.3 Если $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ путь, параметризованный пропорционально длине дуги, то γ — липшицево отображение с константой $L(\gamma)$ (см. определение липшицева отображения в лекции 5).

0.3 Дифференцируемые пути в евклидовом пространстве. Пространство путей

Т.3.1 Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -путь и $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ его производная. Тогда

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

⊙ Достаточно доказать, что функция

$$\psi : [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)], \quad \psi(t) = L(\gamma|_{[a, t]})$$

дифференцируема и $\psi'(t) = |\gamma'(t)|$, т.к. $\psi(a) = 0$. Из аддитивности длины дуги получим

$$\psi(\hat{t}) - \psi(t) = L(\gamma|_{[t, \hat{t}]})$$

где $a \leq t < \hat{t} \leq b$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ функция $\gamma'_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Следовательно, найдется такое $\eta > 0$, что для любых t, \hat{t} , удовлетворяющих условиям

$$a \leq t < \hat{t} \leq b, \quad \hat{t} - t < \eta,$$

имеем для всех $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\tau \in [t, \hat{t}]$

$$(\gamma'_j(\tau))^2 \leq (\gamma'_j(t))^2 + \varepsilon.$$

Пусть t, \hat{t} удовлетворяют условиям

$$a \leq t < \hat{t} \leq b, \quad \hat{t} - t < \eta$$

и $\sigma = (t_i)_{i=0, \overline{k}}$ произвольное разбиение отрезка $[t, \hat{t}]$. Тогда для любых $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ найдутся такие $\tau_{i,j} \in [t_i, t_{i+1}]$, что

$$\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i+1}) = \gamma'_j(\tau_{i,j})(t_i - t_{i+1})$$

и, следовательно,

$$V_\sigma(\gamma|_{[t, \hat{t}]}) = \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{\sum_{j=1}^n (\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i+1}))^2} \leq$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2} (t_{i+1} - t_i) = \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2} (\hat{t} - t).$$

Правая часть не зависит от σ , следовательно

$$L(\gamma|_{[t, \hat{t}]}) \leq \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2} (\hat{t} - t)$$

и $\frac{\psi(\hat{t}) - \psi(t)}{\hat{t} - t} \leq \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2}$. С другой стороны,

$$\frac{|\gamma(\hat{t}) - \gamma(t)|}{|\hat{t} - t|} \leq \frac{\psi(\hat{t}) - \psi(t)}{\hat{t} - t}.$$

В силу того, что функция ψ возрастающая, последние два неравенства верны для любых $t, \hat{t} \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенствам

$$t \neq \hat{t}, \quad |\hat{t} - t| < \eta.$$

Кроме того,

$$\lim_{|\hat{t}-t| \rightarrow 0} \frac{|\gamma(\hat{t}) - \gamma(t)|}{|\hat{t} - t|} = |\gamma'(t)|.$$

Тогда найдется такое $\hat{\eta} > 0$, что для любых $t, \hat{t} \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенствам $t \neq \hat{t}$, $|\hat{t} - t| < \hat{\eta}$, верны неравенства

$$|\gamma'(t)| - \varepsilon \leq \frac{\psi(\hat{t}) - \psi(t)}{\hat{t} - t}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \min\{\eta, \hat{\eta}\}$, что для любых $t, \hat{t} \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенствам $t \neq \hat{t}$, $|\hat{t} - t| < \delta$, верно неравенство

$$|\gamma'(t)| - \varepsilon \leq \frac{\psi(\hat{t}) - \psi(t)}{\hat{t} - t} \leq \sqrt{n\varepsilon + |\gamma'(t)|^2}.$$

Осталось перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. \odot

Множество $C([a, b], X)$ всех путей, определенных на отрезке $[a, b]$ и принимающих значения в пространстве (X, ρ) , обычно наделяют метрикой δ , определяющей топологию равномерной сходимости, т.е.

$$\delta(\gamma, \gamma_1) = \sup\{|\gamma(t) - \gamma_1(t)| : t \in [a, b]\}$$

для $\gamma, \gamma_1 \in C([a, b], X)$. Часто на множестве путей $C([a, b], X)$ рассматривают и более слабую топологию поточечной сходимости.

Пусть E — топологическое пространство. Функция $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$ называется *полу непрерывной снизу в точке $x_0 \in E$* , если для каждого вещественного m , удовлетворяющего условию $m < f(x_0)$, найдется такая окрестность $W(x_0) \subset E$, что для любого $x \in W(x_0)$ $m \leq f(x)$. Функция $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *полу непрерывной снизу в E* , если она полу непрерывна снизу в каждой точке из E .

Л.3.1 Пусть последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится в топологическом пространстве E к точке $x_0 \in E$, I — множество индексов и функции $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f_i : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ($i \in I$) полу непрерывны снизу в точке x_0 . Тогда

(i) функция $F : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $F(x) = \sup\{f_i(x) : i \in I\}$ полу непрерывна снизу в точке x_0 ;

(ii) $f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

⊙ (i) В силу свойства верхней грани, для каждого вещественного m , удовлетворяющего условию $m < F(x_0)$, найдется такой индекс $j \in I$, что $m < f_j(x_0)$. Тогда найдется такая окрестность $W(x_0) \subset E$, что для любого $x \in W(x_0)$ $m \leq f_j(x)$, т.к. функция f_j полу непрерывна снизу в точке x_0 . Следовательно, для любого $x \in W(x_0)$

$$m \leq f_j(x) \leq F(x).$$

(ii) В силу полу непрерывности снизу функции f в точке x_0 , для каждого вещественного m , удовлетворяющего условию $m < f(x_0)$, найдется такая окрестность $W(x_0) \subset E$, что для любого $x \in W(x_0)$ $m \leq f(x)$. Кроме того, для достаточно большого n $x_n \in W(x_0)$, т.к. последовательность (x_n) сходится к точке $x_0 \in E$. Тогда для достаточно большого n $m \leq f(x_n)$. Предположим теперь, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) < f(x_0).$$

Тогда, выбрав такое m , что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) < m < f(x_0),$$

получим противоречие. ⊙

Т.3.2 Функционал длины $L : C([a, b], X) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \infty$ является полунепрерывным снизу относительно топологии поточечной сходимости (и, как следствие, относительно топологии равномерной сходимости). Кроме того, если последовательность путей $\gamma_n : [a, b] \rightarrow X$ ($n \in \mathbb{N}$) поточечно (равномерно) сходится к пути $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, то

$$L(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n).$$

⊙ Для каждого фиксированного $t \in [a, b]$ отображение вычисления $\gamma \rightarrow \gamma(t)$ является непрерывным относительно топологии поточечной сходимости. Следовательно, для каждого фиксированного разбиения σ отрезка $[a, b]$ функция $V_\sigma : C([a, b], X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ является непрерывной относительно топологии поточечной сходимости, как сумма суперпозиций непрерывных отображений. Первое утверждение теоремы 3.2 следует теперь из утверждения (i) леммы 3.1 и определения функционала длины. Последнее утверждение теоремы 3.2 следует из доказанного первого утверждения этой теоремы и утверждения (ii) леммы 3.1. ⊙

С.3.1 Если последовательность спрямляемых путей

$$\gamma_n : [a, b] \rightarrow X \quad (n \in \mathbb{N}),$$

длины которых ограничены одной константой, поточечно (равномерно) сходится к пути $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, то путь γ спрямляемый.

С.3.2 Пусть $M \in \mathbb{R}_+$. Тогда множество

$$\{\gamma \in C([a, b], X) : L(\gamma) \leq M\}$$

замкнуто в пространстве $C([a, b], X)$ относительно топологии поточечной сходимости (топологии равномерной сходимости).

Пр.3.1 Пусть для каждого $n \in \{0, 1, \dots\}$ $F_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — кусочно-аффинный путь, график которого есть объединение отрезков, соединяющих пары точек из множества

$$\{(\frac{p}{2^n}; \frac{\varepsilon(p)}{2^n}) : 0 \leq p \leq 2^n\},$$

где $\varepsilon(p) = 0$ при четном p и $\varepsilon(p) = 1$ при нечетном p , в порядке увеличения первой координаты. Рассмотрим последовательность путей

$$\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_n(t) = (t; F_n(t)) \quad (n \in \{0, 1, \dots\}).$$

Эта последовательность сходится к пути

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_n(t) = (t; 0),$$

длины которого $L(\gamma) = 1$. Но

$$L(\gamma_n) = \sqrt{2} \quad (n \in \{0, 1, \dots\}).$$

Следовательно, функция длины не является в общем случае непрерывной.

Пр.3.2 Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma_n(t) = \frac{\cos(tn^2)}{n}.$$

Тогда

$$L(\gamma_n) \geq \frac{n^2}{n} = n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Кроме того, последовательность (γ_n) ($n \in \mathbb{N}$) сходится равномерно к постоянному пути

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = 0,$$

длины которого $L(\gamma) = 0$. Таким образом,

$$L(\gamma_n) \nrightarrow L(\gamma) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Пр.3.3 Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma_n(t) = 0$$

при $t = 0$ и

$$\gamma_n(t) = \frac{t \sin(1/t)}{n}$$

при $t \in (0, 1]$. Тогда из примера 1.1 получим, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $L(\gamma_n) = \infty$. С другой стороны, для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого $t \in [0, 1]$

$$\gamma_n(t) \leq 1/n.$$

Следовательно, последовательность (γ_n) ($n \in \mathbb{N}$) сходится равномерно к постоянному пути $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(t) = 0$, длины которого $L(\gamma) = 0$. Таким образом, в этом случае также

$$L(\gamma_n) \nrightarrow L(\gamma) \quad (n \rightarrow \infty).$$

0.4 Теорема Арцела-Асколи. Существование кратчайшего пути

Последовательность отображений $f_n : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ ($n \in \mathbb{N}$) называется *равномерно эквинепрерывной* (равностепенно равномерно непрерывной), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $x, y \in X$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, y) < \delta$.

Пр.4.1 Последовательность отображений $f_n : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ ($n \in \mathbb{N}$), удовлетворяющая следующему условию: найдутся такие константы $\alpha > 0$, $K \geq 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $x, y \in X$

$$d(f_n(x), f_n(y)) \leq K\rho^\alpha(x, y),$$

является равномерно эквинепрерывной.

Метрическое пространство называется *ограниченно компактным* (конечно-компактным, собственным), если любое его ограниченное замкнутое подмножество компактно.

Пр.4.2 Пусть $n \in \mathbb{N}$. Пространство \mathbb{R}^n со стандартной метрикой является ограниченно компактным, а его подпространство \mathbb{Q}^n — несобственным метрическим пространством.

Т.4.1 (Арцела-Асколи) Пусть $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно эквинепрерывная последовательность отображений из сепарабельного метрического пространства (X, ρ) в собственное метрическое пространство (Y, d) и для каждого $x \in X$ последовательность $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена. Тогда найдется подпоследовательность последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходящаяся равномерно на любом компактном подмножестве $K \subset X$ к равномерно непрерывному отображению $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$.

⊙ Пусть $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ бесконечное счетное всюду плотное подмножество в X . В силу того, что пространство Y собственное и последовательность $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена, она имеет сходящуюся подпоследовательность $(f_{n_1}(x_1))_{n_1 \in \mathbb{N}}$. Аналогично, найдется такая подпоследовательность $(f_{n_2})_{n_2 \in \mathbb{N}} \subset (f_{n_1})_{n_1 \in \mathbb{N}}$, что последовательности $(f_{n_2}(x_1))_{n_1 \in \mathbb{N}}$, $(f_{n_2}(x_2))_{n_2 \in \mathbb{N}}$ сходятся. Продолжим этот процесс. Тогда для каждого $k > 1$ найдется такая подпоследовательность $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}} \subset (f_{n_{k-1}})_{n_{k-1} \in \mathbb{N}}$, что для

каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ последовательности $(f_{n_k}(x_i))_{n_k} \in \mathbb{N}$ сходятся. Следовательно, для каждого $x \in D$ последовательность $(f_{n_n}(x))_{n_n \in \mathbb{N}}$ сходится. Упростим обозначения, заменив индекс n_n на индекс n . Пусть $\varepsilon > 0$. Используем равномерную эквинепрерывность последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $x, y \in X$, удовлетворяющих неравенству $|xy| < \delta$. Для данного $x \in X$ выберем такую точку $y \in D$, что $|xy| < \delta$. Тогда найдется такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $m, n \geq n_0$

$$d(f_m(x), f_n(x)) \leq d(f_m(x), f_m(y)) + d(f_m(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f_n(x)) < 3\varepsilon,$$

т.к. последовательность $(f_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится. Следовательно, для каждого $x \in X$ последовательность $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится, как фундаментальная последовательность в собственном метрическом пространстве. Положим для каждого $x \in X$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Переходя в определении равномерной эквинепрерывности последовательности $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим равномерную непрерывность отображения f . Пусть $K \subset X$ — компактно. Тогда существует номер $n_1 \in \mathbb{N}$, что для каждого $x \in K$ найдется такой

$$x^* \in \{x_1, \dots, x_{n_1}\} \subset D,$$

что $|xx^*| < \delta$. Кроме того, найдется такой, независимый от выбора $x \in K$, номер $n_2 \in \mathbb{N}$, что для каждого $n \geq n_2$ и для каждого $i \in \{1, \dots, n_1\}$ $d(f_n(x_i), f(x_i)) < \varepsilon$. Тогда для каждого $x \in X$ и для каждого $n \geq n_2$

$$d(f(x), f_n(x)) \leq d(f(x), f(x^*)) + d(f(x^*), f_n(x^*)) + d(f_n(x^*), f_n(x)) < 3\varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно сходится на компактном подмножестве $K \subset X$ к отображению f . \odot

Т.4.2 Пусть X собственное метрическое пространство, $M \geq 0$ константа, для каждого $n \in \mathbb{N}$ путь $\gamma_n : [a, b] \rightarrow X$ параметризован пропорционально длине дуги, $L(\gamma_n) \leq M$ и множество $\{\gamma_n(a) : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено в X . Тогда последовательность путей $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ имеет подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторому пути γ и $L(\gamma) \leq M$.

⊙ В силу задачи 2.3 для каждого $n \in \mathbb{N}$ отображение $\gamma_n : [a, b] \rightarrow X$ M -липшицево. Следовательно, последовательность $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно эквивалентна. Кроме того, найдется подпоследовательность $(\gamma_m(a))_{m \in \mathbb{N}} \subset (\gamma_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторой точке x , поскольку пространство X собственное. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $m_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $m \geq m_0$ и для каждого $t \in [a, b]$

$$|x\gamma_m(t)| \leq |x\gamma_m(a)| + |\gamma_m(a)\gamma_m(t)| \leq \varepsilon + L(\gamma_m)|t - a| \leq M(b - a) + \varepsilon$$

и последовательность $(\gamma_m(t))_{m \in \mathbb{N}}$ ограничена. Следовательно, по теореме Арцела-Асколи и по теореме 3.2 найдется такая сходящаяся подпоследовательность последовательности $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}}$, для которой длина предельного пути не больше, чем M . ⊙

Кривая в метрическом пространстве называется *кратчайшей*, если ее длина наименьшая среди всех кривых с теми же концами. Кривая

$\gamma : I \rightarrow X$ для произвольного интервала $I \subset \mathbb{R}$ называется кратчайшей, если ее сужение на любой замкнутый интервал является кратчайшей.

Т.4.3 Пусть X собственное метрическое пространство, $x, y \in X$ и найдется спрямляемый путь с концами в x, y . Тогда существует кратчайший путь с концами в x, y .

⊙ Пусть $\tau = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ — путь с концами в } x, y\}$ и $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такая последовательность путей, соединяющих точки x, y , что $L(\gamma_n) \rightarrow \tau$ при $n \rightarrow \infty$. Без потери общности можно считать, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ путь γ_n параметризован пропорционально длине дуги и определен на отрезке $[0, 1]$. В силу теоремы 4.2, найдется подпоследовательность последовательности $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходящаяся равномерно к некоторому пути γ , соединяющему точки x, y . Из определения τ получим $\tau \leq L(\gamma)$. С другой стороны, в силу теоремы 3.2,

$$L(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = \tau. \odot$$

3.4.1 Метрическое пространство X является ограничено компактным тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$ функция $\rho_x : X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\rho_x(y) = |xy|$ — собственная (т.е. прообраз компактного множества компакт)

3.4.2 Собственное метрическое пространство является полным и сепарабельным. Замкнутое подпространство собственного метрического пространства является собственным метрическим пространством.

3.4.3 Носитель кратчайшей является простой дугой. Всякий отрезок кратчайшей есть кратчайшая.

0.5 Липшицевы отображения, подобия и изометрические отображения метрических пространств. Расстояние по Липшицу

Пусть $K \geq 0$. Отображение $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ называется K -липшицевым, если для любых $x, x' \in X$

$$d(f(x), f(x')) \leq K|x x'|.$$

При $K = 1$ ($0 \leq K < 1$) это отображение называется *нерастягивающим* (*сжимающим*) *отображением*. Отображение f называется *липшицевым*, если найдется такое $K \geq 0$, что f — K -липшицево отображение.

Функцией смещения для отображения $f : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$ называется функция

$$\rho_f : (X, \rho) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \rho_f(x) = |x f(x)|.$$

Растяжение (дилатация) отображения $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ определяется формулой

$$\text{dil}(f) = \sup \left\{ \frac{d(f(x), f(x'))}{|x x'|} : x \neq x' \right\}.$$

Растяжение (дилатация) отображения f в точке $x \in X$ определяется формулой

$$\text{dil}_x(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dil}(f|_{B(x, \varepsilon)}).$$

Т.5.1 Пусть \hat{X} всюду плотное множество в пространстве (X, ρ) , (Y, d) — полное метрическое пространство и $f : (\hat{X}, \rho) \rightarrow (Y, d)$ — липшицево отображение. Тогда существует такое единственное липшицево отображение $\tilde{f} : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$, что $\text{dil}(\tilde{f}) = \text{dil}(f)$.

⊙ Пусть $x \in X$ и K — константа Липшица для f . Выберем такую последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \hat{X}$, что $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ является последовательностью Коши, поскольку для всех $i, j \in \mathbb{N}$

$$d(f(x_i), f(x_j)) \leq K|x_i x_j|$$

и $|x_i x_j| \rightarrow 0$ при $i, j \rightarrow \infty$. Следовательно, последовательность Коши $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится в полном пространстве (Y, d) . Положим

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Если $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $x' = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n$, то

$$d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f(x_n), f(x'_n)) \leq K \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n x'_n| = K|xx'|.$$

Следовательно, отображение \tilde{f} является липшицевым и $dil(\tilde{f}) = dil(f)$. Кроме того, если два непрерывных отображения совпадают на всюду плотном множестве, то они совпадают всюду. Поэтому отображение \tilde{f} единственно. ⊙

Отображение $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ называется *билипшицевым*, если существуют такие положительные константы c и C , что для всех $x, x' \in X$

$$c|xx'| \leq d(f(x), f(x')) \leq C|xx'|.$$

Метрики ρ и ρ' на множестве X называются *липшицево-эквивалентными*, если $id : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho')$ билипшицево отображение.

Известно, что все нормы на конечномерном векторном пространстве липшицево-эквивалентны.

Сюръекция $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ называется *подобием с коэффициентом подобия* $\sigma_f > 0$, если для любых $x, x' \in X$

$$d(f(x), f(x')) = \sigma_f |xx'|.$$

Подобие f называется *собственным подобием* (*изометрией*), если $\sigma_f \neq 1$ ($\sigma_f = 1$).

Отображение $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ называется *изометрическим отображением* (*отображением, сохраняющим расстояния*), если для любых $x, x' \in X$

$$d(f(x), f(x')) = |xx'|.$$

Отображение f называется *локально изометрическим отображением*, если для любого $x \in X$ найдется такая окрестность $V(x)$, что $f|_{V(x)}$ изометрическое отображение.

Расстоянием по Липшицу между метриками ρ, ρ_1 на множестве X называется величина

$$|\rho\rho_1|_L = \sup\{|\ln \frac{\rho_1(x, x')}{|xx'|}| : x \neq x'\}.$$

Расстоянием по Липшицу d_L между метрическими пространствами $(X, \rho), (Y, d)$ называется величина

$$d_L(X, Y) = \inf\{|\rho f^* d|_L : f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d) - \text{биекция}\},$$

где для любых $x, x' \in X$ $f^* d(x, x') = d(f(x), f(x'))$.

Говорят, что *последовательность метрических пространств $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится по Липшицу к метрическому пространству X* , если $d_L(X_n, X) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Т.5.2 Компакты $(X, \rho), (Y, d)$ изометричны тогда и только тогда, когда $d_L(X, Y) = 0$.

⊙ Необходимость очевидна. Достаточность. Пусть $d_L(X, Y) = 0$. Тогда найдется такая последовательность биекций $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из X на Y , что $1 - \frac{1}{n} \leq \frac{d(f_n(x), f_n(x'))}{|xx'|} \leq 1 + \frac{1}{n}$ для всех $x \neq x'$. Следовательно, последовательность $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно эквинепрерывна и имеет сходящуюся подпоследовательность по теореме Арцела-Асколи. Ясно, что предел этой подпоследовательности является изометрией пространства (X, ρ) на (Y, d) . ⊙

Пр.5.1 Пусть X граф с двумя вершинами и ребрами $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, причем для каждого $n \in \mathbb{N}$ ребро e_n изометрично отрезку $[0, 1 + 1/n]$ со стандартной метрикой. Пространство Y получено из пространства X добавлением одного ребра e_0 , изометричного отрезку $[0, 1]$. Тогда $|XY|_L = 0$ и пространства X, Y не являются изометричными. Действительно, пусть $n \geq 2$. Положим

$$f_n : (X, \rho) \rightarrow (Y, d), \quad f_n(e_n) = e_0, \quad f_n(e_k) = e_k \quad \text{при} \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$f_n(e_k) = e_{k-1}$ при $k \geq n + 1$. Тогда нетрудно проверить, что

$$|\rho f_n^* d|_L \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

3.5.1 Для каждого $\emptyset \neq M \subset X$ функция

$$\rho_M : (X, \rho) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \rho_M(x) = \inf\{|xy| : y \in M\}$$

является нерастягивающей функцией.

3.5.2 Если отображение $f : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$ является

K -липшицевым, то функция смещения для него является $(K + 1)$ -липшицевой функцией.

3.5.3 Для K -липшицевого (липшицевого) отображения $dil(f) \leq K$ ($dil(f) < \infty$). Если $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$, $g : (Y, d) \rightarrow (Z, d_1)$ — липшицевы отображения, то суперпозиция $g \circ f$ — липшицево отображение и $dil(g \circ f) \leq dil(g)dil(f)$.

3.5.4 Множество всех липшицевых отображений из метрического пространства в нормированное пространство является векторным пространством. Для любых таких липшицевых отображений f, g и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ имеют место неравенства $dil(g + f) \leq dil(g) + dil(f)$, $dil(\lambda f) \leq |\lambda|dil(f)$.

3.5.5 Для метрических пространств (X, ρ) , (Y, d) следующие три метрики на множестве $X \times Y$ липшицево-эквивалентны:

$$\begin{aligned} \rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \sqrt{|x_1 x_2|^2 + |y_1 y_2|^2}, \\ \rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= |x_1 x_2| + |y_1 y_2|, \\ \rho_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \max\{|x_1 x_2|, |y_1 y_2|\}. \end{aligned}$$

3.5.6 Две липшицево-эквивалентные метрики — одновременно полные или неполные.

3.5.7 Расстояние по Липшицу неотрицательная, симметричная функция, удовлетворяющая неравенству треугольника.

0.6 Пространство с внутренней метрикой. Сегмент. Геодезическое пространство

Метрика на множестве X называется *внутренней*, если для любых $x, y \in X$ и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $z \in X$, что

$$\max\{|xz|, |yz|\} \leq |xy|/2 + \varepsilon.$$

Л.6.1 Пусть X пространство с внутренней метрикой и $x, y \in X$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует равномерно непрерывное отображение $z : \{\text{двоично-рациональные в } [0, 1]\} \rightarrow X$, обладающее свойствами

$$(i) \quad z(0) = x, \quad z(1) = y;$$

$$(ii) \quad \left| z\left(\frac{k}{2^n}\right) z\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right| \leq \frac{1}{2^n}(|xy| + \varepsilon)$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $k = 0, \dots, 2^n - 1$.

⊙ Положим $z(0) = x, z(1) = y$ и предположим, отображение z уже определено для чисел вида $\frac{k}{2^{n-1}}$ при $k = 0, \dots, 2^{n-1}$ с более сильным условием, чем (ii):

$$(iii) \quad \left| z\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) z\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) \right| \leq \frac{1}{2^{n-1}}(|xy| + \varepsilon(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}})).$$

Выберем для $k = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$ такую точку $z\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)$, что

$$\begin{aligned} \max\left\{\left| z\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) z\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) \right|, \left| z\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) z\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) \right|\right\} \leq \\ \frac{1}{2} \left| z\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) z\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) \right| + \frac{\varepsilon}{2^{2n}}. \end{aligned}$$

Используя наше предположение, получим, что правая часть этого неравенства не превосходит

$$\frac{1}{2^n}(|xy| + \varepsilon(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n})).$$

Равномерную непрерывность этого отображения теперь нетрудно получить из (ii). ⊙

Метрика на множестве X называется *строго внутренней*, если для любых $x, y \in X$ найдется такая точка $z \in X$ (называемая *серединой* между x, y), что

$$|xz| = |yz| = |xy|/2.$$

Метрическое пространство со строго внутренней метрикой называется *метрически выпуклым пространством*.

Пр.6.1 Выпуклое множество без ненулевого конечного числа точек с индуцированной из евклидовой плоскости метрикой является пространством с внутренней метрикой, которая не является строго внутренней метрикой.

В метрически связном пространстве (X, ρ) определим *метрику* ρ_l , относительно которой расстояние $|xy|_l$ между произвольными двумя точками $x, y \in X$ равно нижней грани длин кривых, соединяющих эти точки (эту метрику иногда называют *внутренней метрикой относительно исходной метрики*, но чаще — *the length metric* или *the path metric*).

Л.6.2 В метрически связном пространстве (X, ρ) ρ_l — внутренняя метрика и для любых $x, y \in X$ $|xy| \leq |xy|_l$.

⊙ Из определений нижней грани, длины кривой и задачи 1.2 следует, что для любых $x, y \in X$

$$0 \leq |xy| \leq |xy|_l = |yx|_l.$$

Кроме того, если $|xy|_l = 0$, то $x = y$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $x, y, z \in X$. Выберем такие пути

$$\gamma : [a, b] \rightarrow X, \quad \gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow X,$$

что $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y, \gamma_1(a_1) = y, \gamma_1(b_1) = z$,

$$L(\gamma) \leq |xy|_l + \varepsilon/2, \quad L(\gamma_1) \leq |yz|_l + \varepsilon/2.$$

Тогда путь $\gamma * \gamma_1$ соединяет точки x, z и

$$|xz|_l \leq L(\gamma * \gamma_1) = L(\gamma) + L(\gamma_1) \leq |xy|_l + |yz|_l + \varepsilon.$$

Используя произвольность $\varepsilon > 0$, получим неравенство треугольника для функции ρ_l . Кроме того, в силу теоремы 2.2 найдется такое $t \in [a, b]$, что

$$L(\gamma|_{[a,t]}) = L(\gamma|_{[t,b]}) = L(\gamma)/2.$$

Полагая $u = \gamma(t)$, получим

$$\max\{|xu|, |yu|\} \leq L(\gamma)/2 \leq \frac{1}{2}|xy|_l + \varepsilon/4. \odot$$

Пр.6.2 Пусть

$$X = ([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \cup \left\{ \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

с индуцированной метрикой. Тогда $|(\frac{1}{n}; 0)(0; 0)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, но для

каждого $n \in \mathbb{N}$ $|(\frac{1}{n}; 0)(0; 0)|_l \geq 2$. Таким образом, отображение

$id : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho_l)$ не является непрерывным, в отличие от обратного к нему отображения (согласно лемме 6.2).

Пр.6.3 Пусть $K \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ — кривая Коха, $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^2$ и множество

$$D = \cup \{[p, z] : z \in K\}$$

с индуцированной метрикой из \mathbb{R}^3 . Тогда (D, ρ) гомеоморфно замкнутому диску. Но (D, ρ_l) не является гомеоморфным замкнутому диску. Действительно, $|xy|_l = |xy|$ при $z \in K$, $x, y \in [p, z]$ и

$$|xy|_l = |px| + |py|$$

в противном случае. Следовательно, для каждого $x \in D \setminus \{p\}$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что шар $B(x, \varepsilon) \subset (D, \rho_l)$ гомеоморфен открытому интервалу в \mathbb{R} , а не двумерному диску.

Л.6.3

(i) Если $\gamma : [a, b] \rightarrow (X, \rho)$ спрямляемый путь, то $\gamma : [a, b] \rightarrow (X, \rho_l)$ — путь.

(ii) Если $\gamma : [a, b] \rightarrow (X, \rho_l)$ путь, то $\gamma : [a, b] \rightarrow (X, \rho)$ — путь и $L_\rho(\gamma) = L_{\rho_l}(\gamma)$.

(iii) Если (X, ρ) — метрически связное пространство, то $(\rho_l)_l = \rho_l$.

⊙

(i) Используя аддитивность длины дуги для всех $t_0, t \in [a, b]$ получим

$$|\gamma(t_0)\gamma(t)|_l \leq L(\gamma|_{[t_0, t]}) = |L(\gamma|_{[a, t]}) - L(\gamma|_{[a, t_0]})|.$$

Тогда в силу теоремы 2.2 $|\gamma(t)\gamma(t_0)|_l \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$.

(ii) Первое утверждение сразу следует из леммы 6.2. Пусть $\sigma = (t_i)_{i=0, \overline{n}}$ разбиение отрезка $[a, b]$. Из леммы 6.2 получим

$$V_\sigma^\rho(\gamma) \leq V_\sigma^{\rho_l}(\gamma) \Rightarrow L_\rho(\gamma) \leq L_{\rho_l}(\gamma).$$

С другой стороны,

$$V_\sigma^{\rho_l}(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})|_l \leq \sum_{i=0}^{n-1} L_\rho(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}) = L_\rho(\gamma) \Rightarrow L_{\rho_l}(\gamma) \leq L_\rho(\gamma).$$

(iii) Это утверждение следует из определения метрики ρ_l и доказанного утверждения (ii). \odot

Сегментом $[x, y]$ с концами x, y в метрическом пространстве называется кривая с этими концами, длина которой равна $|xy|$. Часто сегмент отождествляют с образом изометрического отображения замкнутого интервала в метрическое пространство.

Метрическое пространство называется *геодезическим пространством*, если любые две его точки могут быть соединены сегментом.

Т.6.1 Пусть (X, ρ) полное метрическое пространство с внутренней метрикой. Тогда $\rho_l = \rho$. Если, кроме того, метрика ρ строго внутренняя, то (X, ρ) — геодезическое пространство.

\odot Пусть $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$ (в случае, когда метрика ρ строго внутренняя, считаем $\varepsilon = 0$). Используя лемму 6.1, найдем равномерно непрерывное отображение $z : \{\text{двоично-рациональные в } [0, 1]\} \rightarrow X$, обладающее свойствами (i), (ii) этой леммы. Это отображение по непрерывности можно продолжить до непрерывного отображения $\hat{z} : [0, 1] \rightarrow X$, поскольку множество двоично-рациональных точек плотно в отрезке $[0, 1]$, равномерно непрерывное отображение z отображает последовательность Коши в последовательность Коши и пространство (X, ρ) полное. Используя свойство (ii), получим

$$L(\hat{z}) \leq |xy| + \varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и определения метрики ρ_l , $|xy|_l \leq |xy|$. Обратное неравенство получено в лемме 6.2. В случае строго внутренней метрики получили $L(\hat{z}) \leq |xy|$. Следовательно, учитывая задачу 1.2, $L(\hat{z}) = |xy|$ и путь \hat{z} параметризует сегмент $[x, y]$. \odot

3.6.1 Если в пространстве с внутренней метрикой $|xy| < r_1 + r_2$, то $B(x, r_1) \cap B(y, r_2) \neq \emptyset$.

3.6.2 В пространстве с внутренней метрикой для всех $x \in X$ $r > 0$ $\overline{B(x, r)} = B[x, r]$.

3.6.3 В пространстве (X, ρ_l) кривая кратчайшая тогда и только тогда, когда она является сегментом.

3.6.4 Пополнение пространства с внутренней метрикой является пространством с внутренней метрикой.

0.7 Геодезическая кривая, луч, прямая. Выпуклость метрического пространства по Менгеру. Теорема Хопфа–Ринова–Кон-Фоссена

Пусть I интервал в \mathbb{R} . Локально изометрическое отображение $\gamma : I \rightarrow (X, \rho)$ называется *геодезической параметризованной кривой*.

Прямой (лучом) в пространстве (X, ρ) называется образ при изометрическом отображении

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X \quad (\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow X).$$

Прямым метрическим пространством называется геодезическое пространство, в котором через любые две различные точки можно провести единственную прямую.

Л.7.1. Если в пространстве (X, ρ) $((X, \rho_l))$ последовательность сегментов (кратчайших) $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к некоторой кривой γ , то эта кривая — сегмент.

⊙ Пусть x, y — концы кривой γ . В силу теоремы 3.2, получим

$$L(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = |xy|.$$

Осталось использовать задачи 1.2, 6.3. ⊙

Т.7.1 (Теорема Хопфа–Ринова–Кон-Фоссена) Для локально-компактного пространства X с внутренней метрикой следующие утверждения эквивалентны:

(i) пространство X собственное;

(ii) пространство X полное;

(iii) каждый геодезический путь $\gamma : [0, a) \rightarrow X$ может быть продолжен до пути $\hat{\gamma} : [0, a] \rightarrow X$;

(iv) найдется такая точка $p \in X$, что каждый кратчайший путь $\gamma : [0, a) \rightarrow X$ с $\gamma(0) = p$ может быть продолжен до пути $\hat{\gamma} : [0, a] \rightarrow X$.

Каждое из условий (i) – (iv) влечет, что X — геодезическое пространство.

\odot (i) \Rightarrow (ii) См. задачу 4.2.

(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) Оставляем в качестве простых упражнений.

(iv) \Rightarrow (i) Докажем от противного. Предположим, что найдется некомпактный замкнутый шар. Положим $R = \sup\{r : \text{шар } B[p, r] \text{ компактен}\}$. Тогда $R < \infty$. Докажем, что шар $B(p, R)$ предкомпактен. Пусть $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ произвольная последовательность из этого шара. Можно считать, что $|px_n| \rightarrow R$ при $n \rightarrow \infty$. В противном случае найдется подпоследовательность последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, содержащаяся в шаре меньшего радиуса и, следовательно, обладающая сходящейся подпоследовательностью, т.к. последний шар компактен. В силу теорем 4.3, 6.1 и задачи 6.3 для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется натурально-параметризованный сегмент

$$\gamma_n : [0, |px_n|] \rightarrow X,$$

соединяющий p с $x_n \in B[p, |px_n|]$. Из последовательности $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ можно выбрать подпоследовательность, в которой сужения путей на отрезок $[0, |px_1|]$ сходятся. Из этой подпоследовательности выберем следующую подпоследовательность путей, сужения которых на отрезок $[0, |px_2|]$ сходятся, и так далее. Затем канторовский диагональный процесс (т.е. выбор n -го элемента из n -й подпоследовательности для $n = 1, 2, \dots$) дает такую последовательность $(\gamma_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$, что для любого $t \in [0, R)$ последовательность $(\gamma_{m_n}(t))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к некоторой точке $\gamma(t) \in X$. В силу леммы 7.1 $\gamma : [0, R) \rightarrow X$ является отображением и кратчайшей. Согласно (iv) эту кратчайшую можно продолжить до пути $\hat{\gamma} : [0, R] \rightarrow X$. Тогда последовательность $(x_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к $\hat{\gamma}(R)$ и замкнутый шар $B[p, R]$ в силу задачи 6.2 компактен. Для любого $x \in B[p, R]$ найдется такое $r(x) > 0$, что шар $B(x, r(x))$ предкомпактен, т.к. пространство X локально компактно. Выберем конечное подпокрытие $(B[x_i, r(x_i)])$ из покрытия этими

шарами шара $B[p, R]$. Объединение шаров этого конечного подпокрытия предкомпактно и содержит шар $B(p, R + \varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Это противоречит выбору R . \odot

Следующие примеры показывают, что все условия теоремы 7.1 существенны.

Пр.7.1 Пусть для всех $x, y \in \mathbb{R}$

$$\delta(x, y) = \min\{1, |x - y|\}.$$

Тогда на \mathbb{R} эта метрика локально совпадает со стандартной метрикой и $id : (\mathbb{R}, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ — гомеоморфизм. Пространство (\mathbb{R}, δ) является ограниченным, полным, локально компактным, но не является компактным и пространством с внутренней метрикой. Действительно, $\delta(x, y) = 1$ для всех таких x, y , что $|x - y| > 1$, но

$$\delta_l(x, y) = |x - y| > 1.$$

Пр.7.2 Рассмотрим интервал $(0, 1) \subset (\mathbb{R}, |.|)$ с индуцированной метрикой. Это пространство ограничено, замкнуто в себе, но не является компактным.

Пр.7.3 Пусть X — бесконечномерное банахово пространство. Это пространство со строго внутренней метрикой, как и любое нормированное пространство. Оно не является локально компактным, т.к. шар $B[0, 1] \subset X$ замкнут и ограничен, но не является компактным.

Пр.7.4 Пространство X из примера 7.3 полное пространство с внутренней метрикой, не являющееся локально компактным. С метрикой $\delta(x, y) = \min\{1, \|x - y\|\}$ ($x, y \in X$) оно не является геодезическим пространством, т.к. каждая кривая с концами в точках x, y с $\|x - y\| > 1$ имеет длину большую единицы, но $\delta(x, y) = 1$.

Л.7.2 Пусть $x \in (X, \rho_l)$, $r > 0$. Тогда для любых $y, z \in B(x, r)$ найдется путь $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ с концами y, z длины меньше, чем $2r$. Кроме того, $\gamma([a, b]) \subset B(x, 2r)$.

\odot Используя неравенство треугольника, получим

$$|yz| \leq |yx| + |xz| < 2r.$$

Следовательно, найдется путь $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ с концами y, z длины меньше, чем $2r$. Последнее включение докажем методом от противного. Пусть найдется такое $t \in [a, b]$, что $\gamma(t) \notin B(x, 2r)$. Тогда

$$|y\gamma(t)| \geq |x\gamma(t)| - |xy|, \quad |z\gamma(t)| \geq |x\gamma(t)| - |xz| > r.$$

Следовательно,

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,t]}) + L(\gamma|_{[t,b]}) \geq |y\gamma(t)| + |z\gamma(t)| > 2r.$$

Получили противоречие. \odot

Говорят, что точка $z \in (X, \rho)$ *лежит между* различных точек $x, y \in X$, если $z \neq x$, $z \neq y$ и $|xz| + |zy| = |xy|$. Пишут: (xzy) .

Метрическое пространство (X, ρ) называется *выпуклым по Менгеру*, если для любой пары различных точек из X найдется точка, лежащая между ними.

Множество A в метрическом пространстве (X, ρ) называется *выпуклым*, если сужение метрики ρ на A — строго внутренняя метрика.

Очевидно, что всякое метрическое пространство со строго внутренней метрикой (в частности, геодезическое пространство) является выпуклым по Менгеру.

Л.7.3 (Транзитивность отношения между) *Для любых попарно различных $x, y, z, t \in X$ $(xyz), (xzt)$ тогда и только тогда, когда $(xyt), (yzt)$.*

\odot Пусть $(xyz), (xzt)$. Тогда

$$|xy| + |yz| = |xz|, \quad |xt| = |xz| + |zt| = |xy| + |yz| + |zt| \geq |xy| + |yt| \geq |xt|.$$

Следовательно, $|xy| + |yt| = |xt|$ и $|yz| + |zt| = |yt|$. Таким образом, $(xyt), (yzt)$. В обратную сторону, аналогично. \odot

3.7.1 Пусть Y — метрическое пространство, X — пространство с внутренней метрикой и $f : X \rightarrow Y$ локально K -липшицево отображение. Тогда f K -липшицево отображение.

0.8 Геодезическая выпуклость и выпуклость по Менгеру. Произведения метрических пространств

Пусть (X, ρ) геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегментом. Множество $A \subset X$ называется *геодезически выпуклым*, если для любых $x, y \in A$ $[x, y] \subset A$. Множество $B \subset X$ называется *строго геодезически выпуклым*, если для любых $x, y \in \overline{B}$

$$(x, y) = [x, y] \setminus \{x, y\} \subset \text{Int}(B).$$

Л.8.1 Пусть (X, ρ) собственное геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегментом и $A \subset X$ геодезически выпукло. Тогда \overline{A} геодезически выпукло.

⊙ Пусть $x, y \in \overline{A}$ и последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ сходятся к x, y соответственно. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow X$ параметризация сегмента $[x_n, y_n]$ пропорционально длине дуги. По теореме Арцела-Асколи найдется подпоследовательность $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторому пути $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, параметризованному пропорционально длине дуги. Тогда для каждого $t \in [0, 1]$

$$\gamma(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m(t) \in \overline{A}.$$

По лемме 7.1 и условию леммы 8.1 γ — параметризация единственного сегмента $[x, y] \subset \overline{A}$. ⊙

Пусть (X, ρ) геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегментом. *Выпуклой оболочкой* $C(A)$ множества $A \subset X$ называется пересечение всех выпуклых подмножеств в X , содержащих множество A .

Л.8.2 Пусть (X, ρ) собственное геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегментом, $C_0(A) = A \subset X$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$C_n(A) = \cup \{[x, y] : x, y \in C_{n-1}(A)\}.$$

Тогда $C(A) = \cup \{C_n(A) : n \geq 0\}$.

⊙ По индукции нетрудно проверить, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$C_n(A) \subset C(A),$$

поскольку множество $C(A)$ геодезически выпуклое. Следовательно,

$$\cup\{C_n(A) : n \geq 0\} \subset C(A).$$

Пусть $x, y \in \cup\{C_n(A) : n \geq 0\}$. Тогда найдется такой номер $n \geq 0$, что $x, y \in C_n(A)$. Следовательно,

$$[x, y] \subset C_{n+1}(A) \subset \cup\{C_n(A) : n \geq 0\}$$

и множество $\cup\{C_n(A) : n \geq 0\}$ — геодезически выпуклое. Тогда

$$C(A) \subset \cup\{C_n(A) : n \geq 0\}. \odot$$

Пр.8.1 Пусть $r > 0$ и $M \subset B(x, r)$, где M — замкнутый заполненный квадрат в \mathbb{R}^2 . Тогда $B(x, r)$ — строго геодезически выпуклое множество. Но $\cap\{B(x, r) : M \subset B(x, r), r > 0, x \in \mathbb{R}^2\} = M$ — геодезически выпукло, но не строго.

Т.8.1 Собственное выпуклое по Менгеру пространство является геодезическим пространством.

⊙ В силу теоремы 6.1 и задачи 4.2 достаточно доказать, что собственное выпуклое по Менгеру пространство является пространством со строго внутренней метрикой. Рассмотрим для различных фиксированных точек $x, y \in X$ множество

$$B = \{z \in X : |xz| + |zy| = |xy|\}.$$

Множество B компактно, как ограниченное и замкнутое множество в собственном пространстве. Функция

$$f : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(z) = \min\{|zx|, |zy|\}$$

непрерывна на компакте. Следовательно, найдется такая точка $m \in B$, что

$$f(m) = \max\{f(z) : z \in B\}.$$

Тогда (xmy) и

$$f(m) = \min\{|mx|, |my|\} \leq |xy|/2.$$

Докажем, что

$$f(m) = |mx| = |my| = |xy|/2.$$

Пусть, напротив, $f(m) = |mx| < |my|$. Тогда, по условию, найдется такая точка $v \in X$, что (mvu) . В силу леммы 7.2, (xvu) и (xmv) . Следовательно,

$$f(m) = |xm| < |xv|$$

и $|vy| \leq f(m) < |xy|/2$. Действительно, если $|vy| > f(m)$, то $\min\{|vx|, |vy|\} > f(m)$ и получаем противоречие. Далее,

$$|mv| = |xv| - |xm| = |xy| - |vy| - |xm| \geq |xy| - 2f(m) > 0.$$

Следовательно,

$$a = \inf\{|mv| : (mvu)\} \geq |xy| - 2f(m) > 0.$$

Пусть последовательность $(|mv_n|)_{n \in \mathbb{N}}$, где

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \{v \in X : (mvu)\},$$

сходится к a . Тогда найдется подпоследовательность $(v_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторой точке v_0 , т.к. пространство X собственное и множество $\{v \in X : (mvu)\}$ ограниченное. Тогда, по условию, найдется такая точка $\hat{v} \in X$, что $(m\hat{v}v_0)$. Следовательно,

$$|m\hat{v}| < |mv_0| = a.$$

Получили противоречие. Таким образом, $f(m) = |mx| = |my| = |xy|/2$.

⊙

Л.8.3 Пусть (X_1, ρ_1) , (X_2, ρ_2) метрические пространства. Тогда

(i) при $p \in [1, \infty)$ формула

$$\rho_p((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = (|x_1y_1|^p + |x_2y_2|^p)^{1/p}$$

определяет метрику на $X_1 \times X_2$;

(ii) формула

$$\rho_\infty((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = \max\{|x_1y_1|, |x_2y_2|\}$$

определяет метрику на $X_1 \times X_2$.

⊙ Пусть $p \in [1, \infty)$, $a_1 = |x_1 y_1|$, $a_2 = |x_2 y_2|$, $b_1 = |y_1 z_1|$, $b_2 = |y_2 z_2|$.

$$\begin{aligned}\rho_p((x_1; x_2), (z_1; z_2)) &= (|x_1 z_1|^p + |x_2 z_2|^p)^{1/p} \leq \\ ((a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p)^{1/p} &\leq (a_1^p + a_2^p)^{1/p} + (b_1^p + b_2^p)^{1/p} = \\ \rho_p((x_1; x_2), (y_1; y_2)) + \rho_p((y_1; y_2), (z_1; z_2)). &\odot\end{aligned}$$

T.8.2 Если (X_1, ρ_1) , (X_2, ρ_2) собственные метрические пространства (пространства со строго внутренней метрикой), то $(X_1 \times X_2, \rho_p)$ собственное метрическое пространство (пространство со строго внутренней метрикой) при $p \in [1, \infty]$.

⊙ Докажем для $p \in [1, \infty)$ (для $p = \infty$ доказательство аналогично). Заметим, что проекция $(X_1 \times X_2, \rho_p)$ на (X_1, ρ_1) ((X_2, ρ_2)) является нерастягивающим отображением. Если $K = K_1 \times K_2$ замкнуто и ограничено в $(X_1 \times X_2, \rho_p)$, то

$$K_1 \subset (X_1, \rho_1), \quad K_2 \subset (X_2, \rho_2)$$

ограничены и $\overline{K_1}$, $\overline{K_2}$ компактны, как замкнутые и ограниченные множества в собственных пространствах. Следовательно, $\overline{K_1} \times \overline{K_2}$ компактно в $X_1 \times X_2$. Но K замкнуто в компакте $\overline{K_1} \times \overline{K_2}$, следовательно K компакт и $(X_1 \times X_2, \rho_p)$ собственное метрическое пространство. Докажем второе утверждение. Пусть $(x_1; x_2), (y_1; y_2) \in (X_1 \times X_2, \rho_p)$. По условию найдутся такие $z_1 \in X_1$, $z_2 \in X_2$, что

$$|x_1 z_1| = |z_1 y_1| = |x_1 y_1|/2, \quad |x_2 z_2| = |z_2 y_2| = |x_2 y_2|/2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\rho_p((x_1; x_2), (z_1; z_2)) &= (|x_1 z_1|^p + |x_2 z_2|^p)^{1/p} = \\ ((|x_1 y_1|/2)^p + (|x_2 y_2|/2)^p)^{1/p} &= \rho_p((x_1; x_2), (y_1; y_2))/2.\end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$\rho_p((y_1; y_2), (z_1; z_2)) = \rho_p((x_1; x_2), (y_1; y_2))/2. \odot$$

T.8.3 Пусть для каждого $i = 1, 2$ (X_i, ρ_i) геодезическое пространство, $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow X_i$ параметризация сегмента $[x_i, y_i]$ пропорционально длине дуги. Тогда

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow (X_1 \times X_2, \rho_p), \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t); \gamma_2(t))$$

параметризация сегмента $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$ пропорционально длине дуги при $p \in [1, \infty]$. Кроме того,

$$L(\gamma) = (L(\gamma_1)^p + L(\gamma_2)^p)^{1/p}$$

при $p \in [1, \infty)$ и

$$L(\gamma) = \max\{L(\gamma_1), L(\gamma_2)\}$$

при $p = \infty$.

⊙ Пусть $p \in [1, \infty)$. Для всех $u, v \in [0, 1]$

$$\rho_p(\gamma(u), \gamma(v)) = (|\gamma_1(u)\gamma_1(v)|^p + |\gamma_2(u)\gamma_2(v)|^p)^{1/p} =$$

$$(L(\gamma_1)^p|u - v|^p + L(\gamma_2)^p|u - v|^p)^{1/p} = (L(\gamma_1)^p + L(\gamma_2)^p)^{1/p}|u - v|.$$

Следовательно, γ — параметризация сегмента пропорционально длине дуги и

$$L(\gamma) = (L(\gamma_1)^p + L(\gamma_2)^p)^{1/p}.$$

При $p = \infty$ доказательство аналогично. ⊙

3.8.1 Докажите теоремы 8.2, 8.3 при $p = \infty$.

0.9 Отображения, неувеличивающие (сохраняющие) длины кривых. Нерастягивающие отображения. Отображения уменьшающие (неуменьшающие) расстояние

$f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ называется *отображением, неувеличивающим длины кривых с коэффициентом $K \geq 0$ (сохраняющим длины кривых)*, если для любого спрямляемого пути $\gamma : [a, b] \rightarrow X$

$$L_Y(f(\gamma)) \leq K L_X(\gamma) \quad (L_Y(f(\gamma)) = L_X(\gamma)).$$

Инъективное отображение, сохраняющее длины кривых, называется *изометрическим вложением*.

Л.9.1

(i) Если $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ K -липшицево отображение, то f является отображением, неувеличивающим длины кривых с коэффициентом K .

(ii) Если $f : (X, \rho_l) \rightarrow (Y, d)$ непрерывное отображение, неувеличивающее длины кривых с коэффициентом K , то f — K -липшицево отображение.

⊙ (i) Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ спрямляемый путь. Для любого разбиения $\sigma = (t_i)_{i=0, \overline{n}}$ отрезка $[a, b]$

$$V_\sigma(f \circ \gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} d(f(\gamma(t_i)), f(\gamma(t_{i+1}))) \leq K \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i) \gamma(t_{i+1})| = KV_\sigma(\gamma).$$

Взяв верхнюю грань по всем разбиениям отрезка $[a, b]$ сначала в правой части неравенства, затем в левой, получим $L_Y(f(\gamma)) \leq KL_X(\gamma)$.

(ii) Для любых $x, y \in X$

$$d(f(x), f(y)) \leq \inf\{L_Y(\hat{\gamma}) : \hat{\gamma} - \text{путь в } Y \text{ с концами } f(x), f(y)\} \leq$$

$$\inf\{L_Y(f \circ \gamma) : \gamma - \text{путь в } X \text{ с концами } x, y\} \leq$$

$$K \inf\{L_X(\gamma) : \gamma - \text{путь в } X \text{ с концами } x, y\} = K|xy|_l. \odot$$

Пр.9.1 Пусть (Y, d) дискретное пространство. Тогда для каждого $K \geq 0$ любое $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ является отображением, неувеличивающим длины кривых с коэффициентом K , т.к. любой путь в Y имеет нулевую длину.

Л.9.2 Пусть $f : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$ нерастягивающее отображение и $x, y \in X$. Тогда верны следующие утверждения.

(i) Если $(yxf(y))$, то $\rho_f(x) \leq \rho_f(y)$. В случае равенства : $(xf(y)f(x))$ и $|f(x)f(y)| = |xy|$.

(ii) Если $(xyf(y))$, то $\rho_f(y) \leq \rho_f(x)$. В случае равенства : $(xf(x)f(y))$ и $|f(x)f(y)| = |xy|$.

⊙ (i) Если $(yxf(y))$, то

$$\rho_f(x) = |xf(x)| \leq |xf(y)| + |f(y)f(x)| \leq |xf(y)| + |yx| = |yf(y)| = \rho_f(y).$$

В случае равенства, все неравенства становятся равенствами. Из третьего равенства следует, что $|f(x)f(y)| = |xy|$, а из второго равенства следует, что $(xf(y)f(x))$.

(ii) Если $(xyf(y))$, то

$$0 < \rho_f(y) = |yf(y)| = |xf(y)| - |xy| \leq |xf(y)| - |f(y)f(x)| \leq |xf(x)| = \rho_f(x).$$

В случае равенства : $|f(y)f(x)| = |yx| > 0$. Следовательно, $f(x) \neq f(y)$, $f(x) \neq x$ и $(xf(x)f(y))$. \odot

Л.9.3 Пусть $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ нерастягивающее отображение и $x, y \in X$. Тогда

(i) если $|f(x)f(y)| = |xy|$ и найдется сегмент $[x, y]$, то $f|_{[x, y]}$ изометрическое отображение;

(ii) если $(Y, d) = (X, \rho)$, найдется единственный сегмент $[x, y]$ и $f(x) = x$, $f(y) = y$, то для любого $z \in [x, y]$ $f(z) = z$;

(iii) если $(Y, d) = (X, \rho)$ геодезическое пространство, в котором любые две точки могут быть соединены единственным сегментом, то множество всех неподвижных точек $Fix(f)$ отображения f является замкнутым геодезически выпуклым множеством в X .

\odot (i) Пусть $z \in [x, y]$. Тогда

$$|xy| = |xz| + |zy| \geq |f(x)f(z)| + |f(z)f(y)| \geq |f(x)f(y)| = |xy|.$$

Следовательно, $|f(x)f(z)| = |xz|$ и $|f(x)f(y)| = |xy|$. Если $w \in [x, y]$, то нетрудно проверить, что $|f(z)f(w)| = |zw|$.

(ii) Это следствие (i).

(iii) Замкнутость множества $Fix(f)$ следует из непрерывности отображения f , а геодезическая выпуклость из (ii). \odot

$f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ называется *отображением, неумещающим (уменьшающим) расстояния*, если для любых (различных) $x, x' \in X$

$$d(f(x), f(x')) \geq |xx'| \quad (d(f(x), f(x')) < |xx'|).$$

Т.9.1 Пусть X компактное метрическое пространство и $f : X \rightarrow X$ уменьшающее расстояния отображение. Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку $x \in X$ и для любого $y \in X$ последовательность $(f^n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к точке x при $n \rightarrow \infty$.

\odot Пусть x точка минимума для функции ρ_f , которая существует, поскольку эта функция непрерывна на компакте. Если $f(x) \neq x$, то

$$\rho_f(f(x)) = |f(x)f^2(x)| < |xf(x)| = \rho_f(x).$$

Получили противоречие. Следовательно, $f(x) = x$. Эта неподвижная точка единственная. Если предположить, что существует еще одна неподвижная точка y отображения f , то получаем противоречие, т.к.

$$|xy| = |f(x)f(y)| < |xy|.$$

Пусть $y \in X$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ $y_n = f^n(y)$. Тогда или $y_n = x$ для некоторого n , в этом случае для каждого $m \geq n$ $f^m(y) = x$, или для каждого $n \geq 0$

$$|y_{n+1}x| = |f(y_n)f(x)| < |y_nx|.$$

Во втором случае найдется

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} |y_nx|,$$

т.к. последовательность строго убывает и ограничена снизу. Пусть $(y_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к точке z подпоследовательность последовательности $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, которая существует, т.к. X компактно. Тогда

$$l = \lim_{i \rightarrow \infty} |y_{n_i}x| = \lim_{i \rightarrow \infty} |y_{n_i+1}x| = \lim_{i \rightarrow \infty} |f(y_{n_i})x| = |f(z)x| = |zx|.$$

Но при $z \neq x$

$$|f(z)x| = |f(z)f(x)| < |zx|.$$

Следовательно, $z = x$. \odot

Л.9.4 Пусть X геодезическое пространство, $f : X \rightarrow X$ уменьшающее расстояния отображение и x точка локального минимума для функции ρ_f . Тогда x единственная неподвижная точка отображения f .

\odot Докажем методом от противного. Пусть $x \neq f(x)$ и $(xyf(x))$. Тогда из утверждения (i) леммы 9.2 получим, что верно неравенство $\rho_f(y) < \rho_f(x)$ или $|f(x)f(y)| = |xy|$. Если точка y достаточно близка к точке x , то первое неравенство приводит к противоречию с тем, что x точка локального минимума для функции ρ_f . А второе равенство приводит к противоречию с тем, что f уменьшает расстояния. Следовательно, $f(x) = x$. Если предположить, что существует еще одна неподвижная точка x' отображения f , то получаем противоречие, т.к.

$$|xx'| = |f(x)f(x')| < |xx'|. \odot$$

Л.9.5 Пусть $f : X \rightarrow X$ неумещающее расстояния отображение, $x, y \in X$ и $(xf(y)y)$. Тогда $\rho_f(x) \geq \rho_f(y)$. Причём, если имеет место равенство, то $|f(x)f(y)| = |xy|$ и $(f(x)xf(y))$.

⊙ Используя условия, получим

$$\rho_f(x) = |xf(x)| \geq |f(y)f(x)| - |f(y)x| \geq |xy| - |f(y)x| = |yf(y)| = \rho_f(y) > 0.$$

Если $\rho_f(x) = \rho_f(y)$, то из третьего неравенства получим $|f(x)f(y)| = |xy| > 0$, а из второго неравенства получим $(f(x)xf(y))$. ⊙

3.9.1 Биекция $f : (X, \rho_l) \rightarrow (Y, d_l)$, сохраняющая длины кривых, является изометрией.

0.10 Изометрии компактных пространств

Пусть $M \subset (X, \rho)$ и $\varepsilon > 0$. Множество $S \subset X$ называется ε -сетью для M , если для любого $x \in M$

$$|xS| \leq \varepsilon.$$

Множество $S \subset (X, \rho)$ называется ε -разделённым для $\varepsilon > 0$, для любых двух различных точек $x, y \in S$

$$|xy| \geq \varepsilon.$$

Т.10.1 Пусть X — компактное метрическое пространство. Тогда

(i) любое нестягивающее сюръективное отображение $f : X \rightarrow X$ является изометрией;

(ii) если отображение $f : X \rightarrow X$ не уменьшает расстояния, то f является изометрией.

⊙ (i) Пусть, напротив, найдутся такие точки $p, q \in X$, что

$$|f(p)f(q)| < |pq|.$$

Выберем такое $\varepsilon > 0$, что

$$|f(p)f(q)| < |pq| - 5\varepsilon.$$

Пусть n — такое натуральное число, что в X существует хотя бы одна ε -сеть мощности n . Рассмотрим множество $W \subset X^n$ всех ε -сетей в X ,

состоящих из n точек каждая. Это множество замкнуто в (X^n, ρ_∞) , следовательно, оно компактно. Определим функцию

$$F : X^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n |x_i x_j|.$$

Тогда найдется элемент $S = (x_1, \dots, x_n) \in W$, на котором липшицева функция F достигает минимума. Кроме того,

$$f(S) = (f(x_1), \dots, f(x_n)) \in W,$$

т.к. f — нерастягивающая сюръективная функция. Более того, $F(f(S)) \leq F(S)$, т.к. для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$|f(x_i)f(x_j)| \leq |x_i x_j|.$$

Но $F(S)$ — минимум функции F на W . Следовательно, $F(f(S)) = F(S)$ и для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$|f(x_i)f(x_j)| = |x_i x_j|.$$

С другой стороны, найдутся такие номера $i, j \in \{1, \dots, n\}$, что

$$|px_i| \leq \varepsilon, \quad |qx_j| \leq \varepsilon.$$

Для этих номеров мы имеем

$$|x_i x_j| \geq |pq| - |px_i| - |qx_j| \geq |pq| - 2\varepsilon,$$

$$|f(x_i)f(x_j)| \leq |f(p)f(q)| + |f(p)f(x_i)| + |f(x_j)f(q)| \leq |f(p)f(q)| + 2\varepsilon < |pq| - 3\varepsilon.$$

Таким образом, $|f(x_i)f(x_j)| < |x_i x_j|$. Противоречие.

(ii) Выберем произвольно $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ положим $x_n = f^n(x)$, $y_n = f^n(y)$. Тогда найдутся сходящиеся подпоследовательности

$$(x_{n_m})_{m \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (y_{n_m})_{m \in \mathbb{N}} \subset (y_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

т.к. пространство X компактно. Следовательно, найдется такой номер n_m , что

$$|x_{n_m} x_{n_{m+1}}| < \varepsilon/2, \quad |y_{n_m} y_{n_{m+1}}| < \varepsilon/2.$$

Тогда для $k = n_{m+1} - n_m$

$$|xx_k| \leq |x_1 x_{k+1}| \leq \dots \leq |x_{n_m} x_{n_{m+1}}| < \varepsilon/2.$$

Аналогично, $|yy_k| < \varepsilon/2$. Следовательно,

$$|xy| \leq |x_1y_1| \leq \dots \leq |x_ky_k| \leq |x_kx| + |xy| + |yy_k| < |xy| + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$,

$$|xy| = |x_1y_1| = |f(x)f(y)|.$$

Следовательно, f — изометрическое отображение и $f(X)$ — компакт. Покажем, что f сюръекция. Пусть, напротив, найдется $p \in X \setminus f(X)$. Тогда существует, такое $\varepsilon > 0$, что

$$B(p, \varepsilon) \cap f(X) = \emptyset,$$

поскольку компакт $f(X)$ замкнут в компакте X . В силу задачи 10.1, найдется максимальное число n точек ε -разделенного множества в X и пусть $S \subset X$ — ε -разделенное множество из n точек. Тогда $f(S)$ — ε -разделенное множество из n точек, т.к. f — изометрическое отображение. С другой стороны,

$$|pf(S)| \geq |pf(X)| \geq \varepsilon.$$

Следовательно, $f(S) \cup \{p\}$ — ε -разделенное множество из $n + 1$ точек. Получили противоречие. \odot

Пр.10.1 Простой путь

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t; \sin t)$$

— изометрическое вложение, но не изометрия на образ.

Л.10.1 Пусть (X, ρ) геодезическое пространство, $M \subset X$ открыто, $(M, d = \rho|_M)$ метрически связно. Тогда включение $i : (M, d_l) \rightarrow X$ является локальной изометрией.

\odot Пусть $x \in M$ и $B(x, 2r) \subset M$. В силу леммы 7.2, для любых $y, z \in B(x, r)$ найдется сегмент

$$[y, z]_X \subset B(x, 2r) \subset M.$$

Тогда

$$d_l(y, z) \leq L([y, z]) = |yz| = d(y, z).$$

Следовательно, $d_l(y, z) = d(y, z)$ и $i : B(x, r) \rightarrow X$ — сохраняет расстояния. Таким образом, i локальная изометрия, поскольку $M \subset X$ открыто.

\odot

Л.10.2 Пусть $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ локальная изометрия. Тогда для любого $x \in X$ найдется такое положительное вещественное число r , что

$$f|_{B(x, r)} : B(x, r) \rightarrow B(f(x), r)$$

— изометрия и $\psi : X \rightarrow (0, \infty]$,

$$\psi(x) = r_x = \sup\{r : f|_{B(x, r)} : B(x, r) \rightarrow B(f(x), r) \text{ — изометрия}\}$$

— нерастягивающее отображение.

⊙ Пусть $x \in X$. Тогда найдется такая окрестность $V(x)$, что

$$f|_{V(x)} : V(x) \rightarrow f(V(x))$$

— изометрия. Выберем $B(x, r) \subset V(x)$. Тогда $f|_{B(x, r)}$ — изометрическое отображение и

$$B(f(x), r) \subset f(V(x)).$$

Кроме того, для любого $q \in B(f(x), r)$ найдется такое $p \in V(x)$, что $f(p) = q$. Но

$$|xp| = d(f(x), q) < r.$$

Следовательно, $p \in B(x, r)$ и

$$f|_{B(x, r)} : B(x, r) \rightarrow B(f(x), r)$$

— изометрия. Если найдется такое $x \in X$, что $r_x = \infty$, то $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ — изометрия и для любого $x \in X$ $r_x = \infty$. Пусть для любого $x \in X$ $r_x < \infty$. Заметим, что для всех $r > 0$, $x' \in B(x, r)$

$$B(x', r - |xx'|) \subset B(x, r).$$

Следовательно, $|r_x - r_{x'}| \leq |xx'|$. ⊙

Л.10.3

(i) Локальная изометрия сохраняет длины.

(ii) Если $f : (X, \rho_l) \rightarrow (Y, d_l)$ — локальная изометрия, то f — нерастягивающее отображение.

(iii) Если $f : (X, \rho_l) \rightarrow (Y, d_l)$ — локальная изометрия и гомеоморфизм, то f — изометрия.

⊙ (i) Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ — путь. Из компактности отрезка $[a, b]$ следует, что найдется такое $r > 0$, что для каждого $t \in [a, b]$ $r < r_{\gamma(t)}$. В силу равномерной непрерывности отображения γ , найдется такое $\delta > 0$, что для всех $t, t' \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|t - t'| < \delta$,

$$|\gamma(t)\gamma(t')| < r.$$

Пусть $\sigma = (t_i)_{i=0, \overline{n}}$ такое разбиение отрезка $[a, b]$, что $|\sigma| < \delta$. Тогда для каждого $i = \overline{0, n-1}$

$$\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset B(\gamma(t_i), r).$$

Следовательно,

$$L(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}) = L(f \circ \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]})$$

и в силу аддитивности длины дуги $L(\gamma) = L(f \circ \gamma)$.

(ii) Это следствие доказанного утверждения (i) и утверждения (ii) леммы 9.1.

(iii) Это следствие доказанного утверждения (ii). ⊙

Пусть $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ непрерывное отображение, $\gamma : [a, b] \rightarrow Y$ путь, $x \in f^{-1}(\gamma(a))$. Путь $\gamma' : [a, b] \rightarrow X$ называется *лифтом* (*подъемом*) *пути* γ с началом в точке x относительно отображения f , если $f \circ \gamma' = \gamma$ и $\gamma'(a) = x$.

3.10.1 Если в метрическом пространстве существует $(\varepsilon/3)$ -сеть из n точек, то ε -разделенное множество не может содержать более чем n точек. Максимальное (по числу точек) ε -разделенное множество в метрическом пространстве является ε -сетью.

3.10.2 Пусть $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ — банахово пространство непрерывных функций $X \rightarrow \mathbb{R}$ на компакте (X, ρ_l) с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Тогда отображение

$$E : (X, \rho_l) \rightarrow (C(X), \|\cdot\|_\infty), \quad E(x) = \rho(x, \cdot)$$

является изометрическим вложением и изометрией на образ.

0.11 Локальные изометрии. Фактор-пространство

Т.11.1 (Обратный образ внутренней метрики, индуцированной локальным гомеоморфизмом) Пусть X линейно связное хаусдорфово топологическое пространство, $f : X \rightarrow (Y, d_l)$ сюръективный локальный гомеоморфизм. Тогда существует единственная внутренняя метрика на X , относительно которой f локальная изометрия.

⊙ Для любого пути $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ положим

$$L^*(\gamma) = L(f \circ \gamma), \quad \rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad |xy| = \inf\{L^*(\gamma) : \gamma_{x,y} \text{ — путь}\}.$$

Докажем, что ρ — метрика. Пусть $x, y, z \in X$. Тогда $|xy| = |yx| \geq 0$ и

$$|xz| \leq L^*(\gamma_{x,y} * \gamma'_{y,z}) = L^*(\gamma_{x,y}) + L^*(\gamma'_{y,z}).$$

Взяв нижние грани в правой части неравенства, получим

$$|xz| \leq |xy| + |yz|.$$

Пусть $x \neq y$. Выберем такие непересекающиеся окрестности $V(x)$, $V(y)$, что $f|_{V(x)} : V(x) \rightarrow f(V(x))$, $f|_{V(y)} : V(y) \rightarrow f(V(y))$ гомеоморфизмы. Пусть

$$B(f(x), r(x)) \subset f(V(x)), \quad B(f(y), r(y)) \subset f(V(y)).$$

Тогда для любого пути $\gamma_{x,y}$

$$L^*(\gamma) = L(f \circ \gamma) > r(x) + r(y) > 0.$$

Следовательно, $|xy| > 0$. Пусть $\gamma_{x,y} : [a, b] \rightarrow X$ — путь, $\gamma' = f \circ \gamma$, $s \in [a, b]$ и окрестность $V(\gamma(s))$ такая, что

$$f|_{V(\gamma(s))} : V(\gamma(s)) \rightarrow f(V(\gamma(s)))$$

— гомеоморфизм. Выберем такое $r(s) > 0$, что $B(\gamma'(s), r(s)) \subset f(V(\gamma(s)))$ и положим

$$V'(\gamma(s)) = V(\gamma(s)) \cap f^{-1}(B(\gamma'(s), r(s))).$$

Тогда $f|_{V'(\gamma(s))} : V'(\gamma(s)) \rightarrow B(\gamma'(s), r(s))$ — гомеоморфизм. Покроем компакт $\gamma'([a, b])$ конечным набором открытых шаров

$$(B(\gamma'(s_i), r(s_i)/2))_{i=\overline{0,k}} \quad (s_i \in [a, b], \quad i = \overline{0, k}).$$

В силу компактности отрезка $[a, b]$, найдется такое разбиение этого отрезка $\sigma = (t_i)_{i=\overline{0, n}}$, что для каждого $i = \overline{0, n-1}$ найдется $j \in \{0, \dots, k\}$, для которого

$$\gamma'([t_i, t_{i+1}]) \subset B(\gamma'(s_j), r(s_j)/2).$$

В силу леммы 7.2, для любого $i = \overline{0, n-1}$ найдется такой путь γ'_i , соединяющий $\gamma'(t_i)$ с $\gamma'(t_{i+1})$, что $L(\gamma'_i) < r(s_j)$ и принадлежащий открытому шару $B(\gamma'(s_j), r(s_j))$. Пусть для любого $i = \overline{0, n-1}$

$$\gamma_i = (f|_{V'(\gamma(s_j))})^{-1}(\gamma'_i)$$

(это лифт пути γ'_i) и

$$\gamma_{x,y}^* = \gamma_0 * \dots * \gamma_{n-1}.$$

Тогда

$$L^*(\gamma_i) = L(\gamma'_i) < r(s_j)$$

и $L(\gamma_{x,y}^*) < \infty$. Следовательно, $|xy| < \infty$ и ρ — метрика. Пусть $x \in X$. Тогда найдется такая окрестность $V(x)$, что

$$f|_{V(x)} : V(x) \rightarrow B(f(x), r(x))$$

— гомеоморфизм. Пусть

$$V'(x) = f^{-1}(B(f(x), r(x)/4)) \cap V(x), \quad x_1, x_2 \in V'(x),$$

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2) \in B(f(x), r(x)/4).$$

Тогда

$$|y_1 y_2| = \inf\{L(\gamma) : \gamma_{y_1, y_2} - \text{путь}\}.$$

В силу леммы 7.2, найдем путь γ_{y_1, y_2} , чей образ содержится в $B(f(x), r(x)/2)$ и чья длина меньше чем $r(x)/2$. Пусть γ'_{x_1, x_2} лифт пути γ . Тогда $L^*(\gamma') = L(\gamma)$ и

$$|x_1 x_2| \leq d(y_1, y_2) = \inf\{L(\gamma) : \gamma_{y_1, y_2} - \text{путь}\}.$$

Пусть $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такая последовательность путей с концами x_1, x_2 , что

$$L^*(\gamma_n) \rightarrow |x_1 x_2| \quad (n \rightarrow \infty).$$

Кроме того,

$$d(y_1, y_2) \leq L^*(\gamma_n) \rightarrow |x_1 x_2| \quad (n \rightarrow \infty).$$

Следовательно, $d(y_1, y_2) = |x_1 x_2|$ и f изометрически отображает $V'(x)$ на свой образ. Пусть $x, x' \in X$. В силу утверждения (i) леммы 10.3, для любого пути $\gamma_{x,y}$ $L(\gamma) = L(f \circ \gamma)$. Таким образом, $L(\gamma) = L^*(\gamma)$ и из определения ρ следует, что это внутренняя метрика. Пусть ρ' еще одна внутренняя метрика на X , относительно которой f локальная изометрия. Тогда

$$\rho'(x, x') = \inf\{L(\gamma) : \gamma_{x,x'} - \text{путь}\} = \inf\{L(f \circ \gamma) : \gamma_{x,x'} - \text{путь}\} = |xx'|. \odot$$

Т.11.2 Пусть $f : (X, \rho_l) \rightarrow (Y, d)$ локальная изометрия и пространство (X, ρ_l) полное. Тогда для любой геодезической (кратчайшей) $\gamma : [0, a] \rightarrow Y$ и любой такой точки x_0 , что $f(x_0) = \gamma(0)$, существует единственная геодезическая (кратчайшая) $\hat{\gamma} : [0, a] \rightarrow X$, удовлетворяющая условиям: $\hat{\gamma}(0) = x_0$ и $f(\hat{\gamma}(t)) = \gamma(t)$.

⊙ Пусть путь γ параметризован длиной дуги. Рассмотрим такой участок $[0, t)$ отрезка $[0, a]$, что путь $\gamma|_{[0,t)}$ может быть лифтирован в X , т.е. найдется такой путь $\hat{\gamma}_t : [0, t) \rightarrow X$, что $f \circ \hat{\gamma}_t = \gamma|_{[0,t)}$ и $\hat{\gamma}_t(0) = x_0$. Множество таких участков не пусто, т.к. сужение f на достаточно малую окрестность точки x_0 является изометрией на образ. Пусть $[0, t_0)$ максимальный интервал, для которого такой лифт существует. Выберем такую сходящуюся к t_0 при $n \rightarrow \infty$ последовательность $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $t_n < t_0$. Тогда $(\hat{\gamma}_{t_0}(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ является последовательностью Коши, сходящейся к точке p , поскольку пространство X полное. Ясно, что точка p не зависит от выбора последовательности $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Кроме того, последовательность

$$(f \circ \hat{\gamma}_{t_0}(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

сходится к точке $\gamma(t_0)$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому γ допускает лифт на отрезке $[0, t_0]$. Если $t_0 \neq a$, то поскольку f локальная изометрия, найдется такое $\varepsilon > 0$, что существует лифт пути $\gamma|_{[0, t_0 + \varepsilon)}$. Получили противоречие с тем, что $[0, t_0)$ максимальный интервал. Покажем, что если $\gamma : [0, a] \rightarrow Y$ — сегмент, то $\hat{\gamma} : [0, a] \rightarrow X$ — сегмент. Пусть $L(\gamma) = |\gamma(0)\gamma(a)|$. Тогда $L(\hat{\gamma}) = |\gamma(0)\gamma(a)|$, поскольку локальная изометрия сохраняет длину пути. Но локальная изометрия является нерастягивающим отображением, поэтому

$$L(\hat{\gamma}) = |\gamma(0)\gamma(a)| \leq |\hat{\gamma}(0)\hat{\gamma}(a)| \leq L(\hat{\gamma})$$

и $L(\hat{\gamma}) = |\hat{\gamma}(0)\hat{\gamma}(a)|$. ⊙

Л.11.1 Пусть $f : (X, \rho_l) \rightarrow (Y, d_l)$ локальная изометрия, $I = [a, b]$ ($I = \mathbb{R}$, $I = [0, \infty)$), $\gamma : I \rightarrow X$ — путь и $f \circ \gamma : I \rightarrow Y$ — параметризация сегмента (прямой, луча). Тогда $\gamma : I \rightarrow X$ — параметризация сегмента (прямой, луча).

⊙ Пусть $I = [a, b]$. Тогда, в силу леммы 10.3,

$$|f(\gamma(a))f(\gamma(b))| \leq |\gamma(a)\gamma(b)| \leq L_X(\gamma) = L_Y(f \circ \gamma) = |f(\gamma(a))f(\gamma(b))|. \odot$$

Пусть R — отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, ρ) . Определим функцию $\rho_R : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, $\rho_R(x, y) =$

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^k |p_i q_i| : p_1 = x, p_{i+1} \sim q_i, q_k = y, i \in \{1, \dots, k-1\}, k \in \mathbb{N} \right\},$$

которая задает *фактор-полуметрику* на фактор-пространстве. Сопоставим полуметрическому пространству (X, ρ_R) метрическое пространство $(X/\rho_R, \rho_R)$, отождествляя точки, находящиеся на нулевом расстоянии (сохраняя то же самое обозначение ρ_R для этой метрики). Полученная метрика называется *фактор-метрикой* или *метрикой фактор-пространства*.

Пусть $(X_\alpha, \rho_{\alpha l})_{\alpha \in A}$ — семейство пространств с внутренней метрикой. *Внутренней метрикой дизъюнктного объединения пространств* называется функция

$$\rho_l : \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \times \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

удовлетворяющая двум условиям :

1. Если найдется такое $\alpha \in A$, что $x, y \in X_\alpha$, то $\rho_l(x, y) = \rho_{\alpha l}(x, y)$;
2. В противном случае $\rho_l(x, y) = \infty$.

Л.11.2 Пусть $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ — произвольная функция, D — класс таких полуметрик ρ на X , что $\rho \leq b$. Тогда для любых $x, y \in X$

$$\rho_m(x, y) = \sup\{|xy| : \rho \in D\}$$

— максимальная полуметрика в D . Если b — конечная функция, то ρ_m — конечная полуметрика.

⊙ Докажем лишь неравенство треугольника (остальные свойства легко проверить). Для любых $x, y, z \in X$

$$\rho_m(x, y) \leq \sup\{|xz| + |zy| : \rho \in D\} \leq$$

$$\sup\{|xz| : \rho \in D\} + \sup\{|zy| : \rho \in D\} = \rho_m(x, z) + \rho_m(z, y). \odot$$

С.11.1 Пусть пространство X покрыто семейством $(X_\alpha, \rho_\alpha)_{\alpha \in A}$, где для каждого $\alpha \in A$ ρ_α — полуметрика. Класс D всех таких полуметрик ρ , что для каждого $\alpha \in A$

$$\rho(x, y) \leq \rho_\alpha(x, y)$$

для всех $x, y \in X$, содержит единственную полуметрику ρ_m , обладающую свойством: для каждого $\rho \in D$ для всех $x, y \in X$

$$\rho(x, y) \leq \rho_m(x, y).$$

Причем, если для каждого $\alpha \in A$

$$\rho_\alpha = \rho_{\alpha l},$$

то $\rho_m = \rho_{ml}$. Если, кроме того, X связно, для каждого $\alpha \in A$ X_α открыто и ρ_α — конечная, то ρ_m — конечная.

⊙ Если ρ_α заданы не на всем X , то полагаем $\rho_\alpha(x, y) = \infty$ при $x \notin X_\alpha$ или $y \notin X_\alpha$. Применим лемму 11.2 к функции

$$b(x, y) = \inf\{\rho_\alpha(x, y) : \alpha \in A\}.$$

Пусть для каждого $\alpha \in A$

$$\rho_\alpha = \rho_{\alpha l}.$$

Тогда $\rho_{ml} \leq \rho_{\alpha l} = \rho_\alpha$, т.к. $\rho_m \leq \rho_\alpha$ и $\rho_m \in D$. Следовательно, $\rho_m = \rho_{ml}$, т.к. ρ_m максимальна. ⊙

Т.11.2 Пусть R — эквивалентность на (X, ρ) и для любых $x, y \in X$ $b_R(x, y) = 0$ при $x \sim y$, $b_R(x, y) = |xy|$ в остальных случаях. Тогда ρ_R — максимальная среди всех полуметрик $\hat{\rho}$, удовлетворяющих неравенству $\hat{\rho} \leq b_R$.

⊙ Пусть D — класс всех таких полуметрик $\hat{\rho}$, что $\hat{\rho} \leq b_R$. Тогда $\rho_R \in D$ и достаточно доказать неравенство $\rho_R \geq \hat{\rho}$ для каждого $\hat{\rho} \in D$. Пусть $x = p_1$, $y = q_k$ и $b_R(q_i, p_{i+1}) = 0$ при $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Тогда

$$\hat{\rho}(x, y) \leq \sum_{i=1}^k \hat{\rho}(p_i, q_i) + \sum_{i=1}^{k-1} \hat{\rho}(q_i, p_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^k |p_i q_i|.$$

Следовательно, $\hat{\rho} \leq \rho_R \odot$

3.11.1 ρ_R — полуметрика.

3.11.2 В метрическом пространстве (X, ρ) $\rho_R \leq \rho$.

3.11.3 Закончить доказательство следствия 11.1.

0.12 Однородные пространства. Метрика Буземана на группе подобий метрического пространства

Метрическое пространство называется *метрически однородным*, если для любых $x, y \in X$ найдется такая изометрия $I : X \rightarrow X$, что $I(x) = y$. Пространство, локально изометричное евклидову пространству называется *плоским метрическим пространством*.

Пусть G подгруппа группы $Iso(X, \rho_l)$. Введем на X отношение эквивалентности R_G следующим образом : $x \sim y$, если найдется такой элемент $g \in G$, что $x = g(y)$. Обозначим $X/G = X/R_G$.

Рассмотрим метрику $\hat{\rho}$ на X/G

$$\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) = \inf\{|xy| : x \in \hat{x}, y \in \hat{y}\}$$

для $\hat{x}, \hat{y} \in X/G$. Учитывая, что класс эквивалентности точки $x \in X$ является орбитой

$$O(x) = \{g(x) : g \in G\}$$

этой точки, можно дать другое определение этой метрики

$$\hat{\rho}(O(x), O(y)) = \inf\{|xg(y)| : g \in G\}.$$

Л.12.1 Имеет место равенство $\hat{\rho} = \rho_{R_G}$.

⊙ Пусть $x = p_1, y = q_k \in X$. Из определения метрики ρ_{R_G} следует, что найдутся такие изометрии $g_i \in G$ при $i \in \{1, \dots, k-1\}$, что $g_i(p_{i+1}) = q_i$. Рассмотрим новую последовательность

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= p_1 = x, & \tilde{q}_1 &= q_1, & \tilde{p}_2 &= g_1(p_2), & \tilde{q}_2 &= g_1(q_2), \dots, \\ \tilde{p}_k &= g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_{k-1}(p_k), & \tilde{q}_k &= g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_{k-1}(q_k). \end{aligned}$$

Тогда $|p_i q_i| = |\tilde{p}_i \tilde{q}_i|$, т.к. $g_i \in G$ при $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^k |p_i q_i| = \sum_{i=1}^k |\tilde{p}_i \tilde{q}_i|.$$

С другой стороны, по выбору изометрий g_i $\tilde{q}_i = \tilde{p}_{i+1}$. Тогда

$$|x \tilde{q}_k| \leq \sum_{i=1}^k |\tilde{p}_i \tilde{q}_i| + \sum_{i=1}^{k-1} |\tilde{p}_{i+1} \tilde{q}_i| = \sum_{i=1}^k |p_i q_i|.$$

Но $q_k = y$, следовательно, $\tilde{q}_k \in O(y)$. Таким образом, доказали неравенство $\hat{\rho} \leq \rho_{R_G}$. Пусть $y^* \in O(y)$, $x^* \in O(x)$. Тогда $y^* \sim y$, $x^* \sim x$. Положим $p_1 = q_1 = x$, $p_2 = x^*$, $q_2 = y^*$, $p_3 = q_3 = y$. Тогда $\hat{\rho} \geq \rho_{R_G}$. \odot

Л.12.2 Пусть X — локально компактное и полное пространство. Если метрика ρ — строго внутренняя, то метрика $\hat{\rho}$ — строго внутренняя.

\odot Докажем в том случае, когда все орбиты компактны. Общий случай получается из данного с помощью аппроксимации. Пусть $\hat{x}, \hat{y} \in X/G$. Выберем такие $x \in \hat{x}$, $y \in \hat{y}$, что $\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) = |xy|$. Это возможно, поскольку орбиты компактны. Пусть точка $z \in X$ такая, что $|xz| = |zy| = |xy|/2$. Тогда

$$\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{z}) \leq |xz| = |xy|/2 = \hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y})/2.$$

Аналогично, $\hat{\rho}(\hat{y}, \hat{z}) \leq \hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y})/2$. Из неравенства треугольника следует, что эти неравенства являются равенствами. Следовательно, \hat{z} — середина между $\hat{x}, \hat{y} \in X/G$. \odot

Пр.12.1 Если $G = \{g \in Iso(\mathbb{R}^2) : g(x; y) = (x + k; y + l), k, l \in \mathbb{Z}\}$, то фактор-пространство \mathbb{R}^2/G является плоским тором. Если

$$G = \{g \in Iso(\mathbb{R}^2) : g = id \vee g(x; y) = (x; -y)\},$$

то фактор-пространство \mathbb{R}^2/G является полуплоскостью.

Пусть $p \in (X, \rho)$ и $Sim(X, Y)$ — множество всех подобий метрического пространства X на метрическое пространство (Y, d) . Метрика Буземана δ_p на множестве $Sim(X, Y)$ определяется формулой

$$\delta_p(f, \varphi) = \sup\{d(f(x), \varphi(x))e^{-|px|} : x \in X\}$$

для всех $f, \varphi \in \text{Sim}(X, Y)$.

Неподвижная точка собственного подобия называется *центром подобия*, а множество всех центров подобий пространства X обозначается $\text{Cen}(X)$.

Л.12.3 Пусть $p, q \in (X, \rho)$ и \mathbb{R}_+^* — группа положительных вещественных чисел со стандартной операцией умножения. Тогда верны следующие утверждения.

- (i) δ_p — метрика на множестве $\text{Sim}(X, Y)$;
- (ii) метрики δ_p, δ_q липшицево эквивалентны на $\text{Sim}(X, Y)$;
- (iii) отображение $\sigma : (\text{Sim}(X), \circ) \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \sigma(f) = \sigma_f$ — непрерывный гомоморфизм, ядро которого есть группа изометрий;
- (iv) для любых $f, \varphi \in \text{Sim}(X, Y), \theta \in \text{Sim}(Y), \psi \in \text{Iso}(X)$ имеют место равенства $\delta_p(f \circ \psi, \varphi \circ \psi) = \delta_{\psi(p)}(f, \varphi), \delta_p(\theta \circ f, \theta \circ \varphi) = \sigma_\theta \delta_p(f, \varphi)$;
- (v) множества $\text{Cen}(X), X \setminus \text{Cen}(X)$ инвариантны относительно действия группы $\text{Sim}(X)$ на X ;
- (vi) если группа $\text{Sim}(X)$ действует транзитивно на полном метрическом пространстве X , то и группа $\text{Iso}(X)$ действует транзитивно на пространстве X .

⊙

(i) Для всех $f, \varphi \in \text{Sim}(X, Y)$ из неравенств

$$\delta_p(f, \varphi) \leq \sup\{(d(f(x), f(p)) + d(f(p), \varphi(p)) + d(\varphi(p), \varphi(x)))e^{-|px|} : x \in X\} \leq \sigma_f + d(f(p), \varphi(p)) + \sigma_\varphi$$

следует конечность величины $\delta_p(f, \varphi)$. Очевидно, что

$$\delta_p(f, \varphi) = \delta_p(\varphi, f) \geq 0$$

для всех $f, \varphi \in \text{Sim}(X, Y)$. Пусть $f \neq \varphi$. Тогда найдется такая точка $x_0 \in X$, что $f(x_0) \neq \varphi(x_0)$ и

$$\delta_p(f, \varphi) \geq d(f(x_0), \varphi(x_0))e^{-|x_0 p|} > 0.$$

Докажем неравенство треугольника

$$\delta_p(f, \varphi) \leq \sup\{(d(f(x), h(x)) + d(h(x), \varphi(x)))e^{-|px|} : x \in X\} \leq \delta_p(f, h) + \delta_p(h, \varphi)$$

для всех $f, \varphi, h \in \text{Sim}(X, Y)$.

(ii) Это следует из очевидных неравенств

$$\delta_p(f, \varphi)e^{-|pq|} \leq \delta_q(f, \varphi) \leq \delta_p(f, \varphi)e^{|pq|}.$$

(iii) Пусть $x, y \in X$ различны, $f, \varphi \in \text{Sim}(X, Y)$ произвольные. Тогда

$$d(f \circ \varphi(x), f \circ \varphi(y)) = \sigma_f \sigma_\varphi |xy|.$$

Следовательно, $\sigma(f \circ \varphi) = \sigma(f)\sigma(\varphi)$. Последнее утверждение очевидно. Докажем непрерывность σ . Пусть $\delta_p(f_n, f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где $f, f_n \in \text{Sim}(X, Y)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $x \in X$

$$d(f_n(x), f(x)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Следовательно,

$$\sigma(f_n)|xy| = d(f_n(x), f_n(y)) \rightarrow d(f(x), f(y)) = \sigma(f)|xy|$$

и $\sigma(f_n) \rightarrow \sigma(f)$ при $x \neq y, n \rightarrow \infty$.

(iv) Доказательство очевидно.

(v) Пусть $x \in \text{Cen}(X)$, т.е. найдется собственное подобие f такое, что $f(x) = x$. Тогда для каждого $\psi \in \text{Sim}(X)$

$$\sigma(\psi \circ f \circ \psi^{-1}) = \sigma(f).$$

Следовательно, $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$ — собственное подобие. Кроме того,

$$\psi \circ f \circ \psi^{-1}(\psi(x)) = \psi(x).$$

Таким образом, $\psi(x) \in \text{Cen}(X)$.

(vi) Пусть $x, y \in X$. Тогда найдется такое подобие $f \in \text{Sim}(X)$, что $f(x) = y$. Рассмотрим нетривиальный случай, когда подобие f собственное. Тогда, в силу полноты пространства, найдется такая точка $z \in X$, что $f(z) = z$. Кроме того, найдется такое подобие g , что $g(x) = z$. Тогда

$$\sigma(f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g) = 1$$

и $f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g(x) = y$. \odot

Пусть $\text{Const}(X, Y)$ — множество постоянных отображений из X в Y . Приведем без доказательства некоторые результаты о группе подобий с метрикой Буземана.

T.12.1 Если пространства (X, ρ) , (Y, d) — полные, то пространства $(Sim(X, Y) \cup Const(X, Y), \delta_p)$, $(Iso(X, Y) \cup Const(X, Y), \delta_p)$ — полные.

T.12.2 Если пространство (X, ρ) — собственное, то топология пространства $(Sim(X, Y) \cup Const(X, Y), \delta_p)$ совпадает как с топологией поточечной сходимости, так и с компактно-открытой топологией.

T.12.3 Если пространства (X, ρ) , (Y, d) — собственные, то пространство $(Sim(X, Y) \cup Const(X, Y), \delta_p)$ — собственное. Если кроме того, пространство (X, ρ) — компактно, пространство $(Sim(X, Y) \cup Const(X, Y), \delta_p)$ — компактно.

T.12.4 $(Sim(X), \delta_p)$ — топологическая группа, действующая непрерывно на пространстве (X, ρ) .

T.12.5 Пусть пространство (X, ρ) — полное. Тогда верны следующие утверждения.

(i) Если $Cen(X) = X$, то

$$\overline{Sim(X)} = Sim(X) \cup Const(X, X)$$

(замыкание выполняется в пространстве $(Lip(X, Y), \delta_p)$);

(ii) Если $Cen(X) \neq \emptyset$, X , то $Cen(X) \subset \partial(Cen(X))$ и

$$\overline{Sim(X)} = Sim(X) \cup Const(X, \partial(Cen(X)));$$

(iii) Если $Cen(X) = \emptyset$, то

$$\overline{Sim(X)} = Sim(X) = Iso(X).$$

3.12.1 Собственное подобие полного метрического пространства на себя обладает единственным центром подобия.

3.12.2 Если метрическое пространство X ограничено, то $Sim(X) = Iso(X)$.

3.12.3 Докажите свойство (iv) леммы 12.3.

3.12.4 Докажите, что δ_p является метрикой на множестве $Lip(X, Y)$ всех липшицевых отображений из метрического пространства (X, ρ) в метрическое пространство (Y, d) .

0.13 Отклонение и метрика Хаусдорфа

Обозначим $B(X)$ ($B[X]$) множество всех непустых (замкнутых) ограниченных подмножеств метрического пространства (X, ρ) .

Отклонением по Хаусдорфу множества $M \in B(X)$ от непустого множества $W \subset X$ называется число

$$\beta(M, W) = \sup\{|xW| : x \in M\}.$$

Л.13.1 Пусть $M, H \in B(X)$, $\emptyset \neq W \subset X$. Тогда верны следующие утверждения.

$$(i) \quad \beta(M, W) \leq \beta(M, H) + \beta(H, W);$$

(ii) $\beta(M, H) = \inf\{r : M \subset B(H, r)\}$, где $B(H, r) = \cup\{B(x, r) : x \in H\}$ — обобщенный шар;

(iii) Если для каждого $\alpha \in A$ $M_\alpha \in B(X)$ и $M = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$, то

$$\beta(M, H) = \sup\{\beta(M_\alpha, H) : \alpha \in A\}.$$

⊙ (i) Для каждого $\varepsilon > 0$ для любого $y \in M$ найдется такое $z \in H$, что

$$|yz| \leq |yH| + \varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |yW| &\leq |yz| + |zW| \leq |yz| + \beta(H, W) \leq \\ &\leq |yH| + \varepsilon + \beta(H, W) \leq \beta(M, H) + \beta(H, W) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$|yW| \leq \beta(M, H) + \beta(H, W).$$

Осталось взять верхнюю грань в левой части последнего неравенства.

(ii) Пусть

$$R = \inf\{r : M \subset B(H, r)\}$$

и число $r > 0$ такое, что $M \subset B(H, r)$. Тогда для каждого $y \in M$ найдется такая точка $x \in H$, что $|xy| < r$ и, следовательно, $|yH| < r$. Взяв верхнюю грань в левой части установленного неравенства, получим $\beta(M, H) \leq r$.

Теперь в правой части возьмем нижнюю грань. Тогда получим $\beta(M, H) \leq R$. Предположим, что равенства нет. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что

$$\beta(M, H) + \varepsilon < R.$$

Следовательно, для каждого $y \in M$ найдется такая точка $x \in H$, что

$$|yx| < |yH| + \varepsilon \leq \beta(M, H) + \varepsilon.$$

Тогда

$$y \in B(x, \beta(M, H) + \varepsilon) \subset B(H, \beta(M, H) + \varepsilon).$$

В силу произвольности $y \in M$,

$$M \subset B(H, \beta(M, H) + \varepsilon).$$

Таким образом, наше предположение приводит к противоречию.

(iii) Пусть $x \in M$. Тогда найдется такое $\alpha \in A$, что $x \in M_\alpha$. Следовательно,

$$|xH| \leq \beta(M_\alpha, H) \leq \sup\{\beta(M_\alpha, H) : \alpha \in A\}.$$

Возьмем в левой части полученного неравенства верхнюю грань. Тогда получим

$$\beta(M, H) \leq \sup\{\beta(M_\alpha, H) : \alpha \in A\}.$$

Неравенство в другую сторону очевидно. \odot

Расстоянием по Хаусдорфу между множествами $M, W \in B(X)$ называется число

$$\alpha(M, W) = \max\{\beta(M, W), \beta(W, M)\}.$$

Л.13.2 Пусть $M, W \in B(X)$. Тогда верны следующие утверждения.

(i) α — псевдометрика (метрика) на множестве $B(X)$ ($B[X]$);

(ii) $\alpha(M, W) = \inf\{r : M \subset B(W, r), W \subset B(M, r)\}$;

(iii) $\alpha(M, W) = \sup\{||xM| - |xW|| : x \in X\}$.

\odot (i) Это следует из определения, утверждения (i) леммы 13.1 и задачи 13.1.

(ii) Это следует из определения и утверждения (ii) леммы 13.1.

(iii) $\sup\{||xM| - |xW|| : x \in X\} \geq$

$$\max\{\sup\{||xM| - |xW|| : x \in M\}, \sup\{||xM| - |xW|| : x \in W\}\} = \alpha(M, W).$$

Докажем неравенство в другую сторону. Для каждого $\varepsilon > 0$ для любого $x \in X$ найдутся такие $m_x \in M$, $w_x \in W$, что

$$|xm_x| \leq |xM| + \varepsilon, \quad |xw_x| \leq |xW| + \varepsilon.$$

Тогда

$$|xW| \leq |xm_x| + |m_xW| \leq |xM| + |m_xW| + \varepsilon \leq |xM| + \beta(M, W) + \varepsilon.$$

Аналогично получим неравенство

$$|xM| \leq |xW| + \beta(W, M) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$||xM| - |xW|| \leq \alpha(W, M) + \varepsilon.$$

Возьмем в левой части полученного неравенства верхнюю грань. Тогда получим

$$\sup\{||xM| - |xW|| : x \in X\} \leq \alpha(W, M) + \varepsilon.$$

Осталось перейти в правой части неравенства к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. \odot Рассмотрим еще одно расстояние для $M, W \in B(X)$.

$$D(M, W) = \sup\{|xy| : x \in M, y \in W\}.$$

Отметим, что для любых $M, W \in B(X)$ верно неравенство

$\alpha(M, W) \leq D(M, W)$ и функция $D : B(X) \times B(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет неравенству треугольника (докажите!). $D(M) = D(M, M)$ — диаметр множества $M \in B(X)$.

Л. 13.3. Пусть $M, W, A, B \in B(X)$. Тогда

$$|D(M, W) - D(A, B)| \leq \max\{\min\{\beta(M, A) + \beta(W, B), \beta(M, B) + \beta(W, A)\}, \\ \min\{\beta(A, M) + \beta(B, W), \beta(A, W) + \beta(B, M)\}\}.$$

В частности

$$|D(M) - D(A)| \leq 2\alpha(M, A).$$

\odot Выберем произвольно $x \in M$, $y \in W$, $a \in A$, $b \in B$. Применим неравенство треугольника

$$|xy| \leq \min\{|xa| + |ab| + |by|, |xb| + |ba| + |ay|\} \leq$$

$$\min\{|xa| + |by|, |xb| + |ay|\} + D(A, B).$$

Возьмем в правой части последнего неравенства инфимум по всем $a \in A$, $b \in B$. Тогда получим

$$|xy| \leq \min\{|xA| + |yB|, |xB| + |yA|\} + D(A, B) \leq \\ \min\{\beta(M, A) + \beta(W, B), \beta(M, B) + \beta(W, A)\} + D(A, B).$$

Возьмем теперь в левой части полученного неравенства супремум по всем $x \in M$, $y \in W$. Тогда получим

$$D(M, W) - D(A, B) \leq \min\{\beta(M, A) + \beta(W, B), \beta(M, B) + \beta(W, A)\}.$$

Из этого неравенства и произвольности $M, W, A, B \in B(X)$ следует требуемое неравенство. \odot

Л.13.4 Пусть X банахово пространство $p \in X$, $M, W, M_1, \dots, M_n, W_1, \dots, W_n \in B(X)$. Тогда верны следующие утверждения.

- (i) $\alpha(M_1 + \dots + M_n, W_1 + \dots + W_n) \leq \alpha(M_1, W_1) + \dots + \alpha(M_n, W_n)$;
- (ii) $\beta(\overline{C(M)}, p) \leq \beta(M, p)$.

\odot (i) Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ найдутся такие $x_i \in M_i$, $y_i \in W_i$, что

$$\beta(M_1 + \dots + M_n, W_1 + \dots + W_n) \leq \rho(x_1 + \dots + x_n, W_1 + \dots + W_n) + \varepsilon,$$

$$\beta(W_1 + \dots + W_n, M_1 + \dots + M_n) \leq \rho(y_1 + \dots + y_n, M_1 + \dots + M_n) + \varepsilon.$$

Кроме того, для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ найдутся такие $z_i \in W_i$, что

$$\|x_i - z_i\| < \alpha(M_i, W_i) + \varepsilon/n.$$

Тогда

$$\beta(M_1 + \dots + M_n, W_1 + \dots + W_n) - \varepsilon \leq \\ \rho(x_1 + \dots + x_n, W_1 + \dots + W_n) \leq \|x_1 + \dots + x_n - (z_1 + \dots + z_n)\| \leq \\ \|x_1 - z_1\| + \dots + \|x_n - z_n\| \leq \alpha(M_1, W_1) + \dots + \alpha(M_n, W_n) + \varepsilon.$$

Осталось перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем провести аналогичные рассуждения с заменой M на W .

(ii) Пусть $x \in C_1(M)$. Тогда найдутся такие $\lambda \in [0, 1]$, $y, z \in M$, что

$$x = (1 - \lambda)y + \lambda z.$$

Кроме того,

$$|xp| \leq (1 - \lambda)|yp| + \lambda|zp| \leq \beta(M, p).$$

Следовательно, $\beta(C_1(M), p) \leq \beta(M, p)$. По индукции доказывается, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\beta(C_n(M), p) \leq \beta(M, p).$$

Пусть $x \in C(M)$. Тогда найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $x \in C_n(M)$. Следовательно, $|xp| \leq \beta(M, p)$. Возьмем в левой части полученного неравенства верхнюю грань. Тогда получим

$$\beta(\overline{C(M)}, p) = \beta(C(M), p) \leq \beta(M, p). \odot$$

Т.13.1 Если пространство (X, ρ) — полное, то пространство $(B[X], \alpha)$ — полное.

\odot Пусть $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность в $B[X]$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\alpha(M_n, M_m) < \varepsilon$ для всех $m, n \geq n_0$. Рассмотрим множество M всех таких точек $x \in X$, что для любой окрестности U точки x

$$U \cap M_n \neq \emptyset$$

для бесконечно многих $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\alpha(M_n, M) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Найдется такое $m \geq n_0$, что

$$B(x, \varepsilon) \cap M_m \neq \emptyset,$$

т.е. найдется такая точка $y \in M_m$, что $|xy| < \varepsilon$. Кроме того, $|yM_n| < \varepsilon$. Тогда

$$|xM_n| \leq |xy| + |yM_n| < 2\varepsilon.$$

Осталось доказать, что для каждого $x \in M_n$ $|xM| < 2\varepsilon$. Положим $n_1 = n$ и для каждого $k > 1$ выберем такое число $n_k \in \mathbb{N}$, что $n_k < n_{k+1}$ и

$$\alpha(M_l, M_s) < \varepsilon/2^k$$

для любых $l, s \geq n_k$. Пусть $x_1 = x$. В силу того, что для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha(M_{n_k}, M_{n_{k+1}}) < \varepsilon/2^k,$$

найдется точка $x_{k+1} \in M_{n_{k+1}}$ такая, что для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$|x_k x_{k+1}| < \varepsilon/2^k.$$

Последовательность $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ фундаментальная, т.к.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k x_{k+1}| < 2\varepsilon.$$

Следовательно, она сходится к некоторой точке $y \in X$. Тогда

$$|xM| \leq |xy| = \lim_{k \rightarrow \infty} |xx_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k x_{k+1}| < 2\varepsilon. \odot$$

Т.13.2 (Бляшке) Если пространство (X, ρ) — компактное, то пространство $(B[X], \alpha)$ — компактное.

⊙ Учитывая теорему 13.1, достаточно доказать, что $(B[X], \alpha)$ вполне ограничено. Пусть S конечная ε -сеть в X и $M \in B[X]$. Рассмотрим множество

$$S(M) = \{x \in S : |xM| \leq \varepsilon\} \in B[X].$$

Пусть $y \in M$. Тогда найдется такая точка $x \in S$, что $|xy| \leq \varepsilon$. Кроме того, $x \in S(M)$, т.к.

$$|xM| \leq |xy| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, для каждого $y \in M$

$$|yS(M)| \leq \varepsilon.$$

Тогда $\alpha(M, S(M)) \leq \varepsilon$, поскольку по определению $S(M)$ для каждого $x \in S(M)$ $|xM| \leq \varepsilon$. В силу произвольности $M \in B[X]$, множество $B[S]$ является ε -сетью в $B[X]$. ⊙

3.13.1 Пусть $M \in B(X)$, $\emptyset \neq W \subset X$. $\beta(M, W) = 0$ тогда и только тогда, когда $M \subset \overline{W}$.

3.13.2 Если $\beta(M, H) < r$, то $M \subset B(H, r)$.

3.13.3 Если для каждого $\alpha \in A$ $H_\alpha \in B(X)$ и $\bigcup_{\alpha \in A} H_\alpha \subset H$, то

$$\beta(M, H) \leq \inf\{\beta(M, H_\alpha) : \alpha \in A\}.$$

3.13.4 Пусть X банахово пространство, $a \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\beta(aM, aW) = |a|\beta(M, W), \quad \alpha(aM, aW) = |a|\alpha(M, W).$$

3.13.5 Пусть $M, W \in B(X)$. $\alpha(M, W) = \inf\{r : M \subset N_r(W), W \subset N_r(M)\}$, где

$$N_r(M) = \{x \in X : \exists y \in M (|yx| \leq r)\}.$$

0.14 Расстояние по Громову–Хаусдорфу. Метрика Буземана

Расстоянием по Громову–Хаусдорфу между метрическими пространствами (X, ρ) , (Y, d) называется величина

$d_{GH}(X, Y) = \inf\{r : \text{существуют метрическое пространство } (Z, d') \text{ и его подпространства } X', Y', \text{ изометричные } X, Y \text{ соответственно такие, что } \alpha(X', Y') < r\}$. Причем допускается, что $\alpha(X', Y')$ и $d_{GH}(X, Y)$ могут принимать бесконечные значения.

Можно доказать, что $d_{GH}(X, Y) = \inf\{\alpha(X, Y)\}$, где инфимум берется по всем метрикам на $X \cup Y$, продолжающим метрики X и Y .

Л.14.1 Функция d_{GH} удовлетворяет неравенству треугольника.

⊙ Пусть метрики ρ_{12} , ρ_{23} пространств $X_1 \cup X_2$, $X_2 \cup X_3$ такие, что их сужения на пространства X_1 , X_2 и X_3 соответственно, совпадают с исходными метриками этих пространств. Пусть

$$\rho_{13}(x_1, x_3) = \inf\{\rho_{12}(x_1, x_2) + \rho_{23}(x_2, x_3) : x_2 \in X_2\}.$$

Нетрудно проверить, что вместе с исходными метриками на X_1 , X_3 ρ_{13} определяет метрику на $X_1 \cup X_3$. Кроме того,

$$\alpha(X_1, X_3) \leq \alpha(X_1, X_2) + \alpha(X_2, X_3),$$

где $\alpha(X_i, X_j)$ соответствует метрике α_{ij} при $i, j \in \{1, 2, 3\}$. ⊙

Множество $R \subset X \times Y$ называется *соответствием* между множествами X и Y , если для каждой точки $x \in X$ найдется такая точка $y \in Y$, что $(x, y) \in R$, и для каждой точки $y \in Y$ найдется такая точка $x \in X$, что $(x, y) \in R$.

Искажением $\text{dis}R$ соответствия R между метрическими пространствами (X, ρ) , (Y, d) называется величина

$$\text{dis}R = \sup\{|\rho(x, x') - d(y, y')| : (x, y), (x', y') \in R\}.$$

Т.14.1 Для любых метрических пространств X и Y имеет место равенство

$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf\{\text{dis}R : R\}$, где инфимум берется по всем соответствиям R между X и Y , т.е. $d_{GH}(X, Y) = \inf\{r : \text{существует соответствие } R \text{ между } X \text{ и } Y \text{ с } \text{dis}R < 2r\}$.

⊙ Докажем, что для любого $r > d_{GH}(X, Y)$ найдется соответствие R с $\text{dis}R < 2r$. Можно считать, что X и Y подпространства некоторого пространства Z и $\alpha(X, Y) < r$ в Z , т.к. $d_{GH}(X, Y) < r$. Пусть

$$R = \{(x, y) \in X \times Y : \rho_Z(x, y) < r\}.$$

Это соответствие, поскольку $\alpha(X, Y) < r$. Следовательно, для любых $(x, y), (x', y') \in R$

$$|d_Z(x, x') - d_Z(y, y')| \leq d_Z(x, y) + d_Z(x', y') < 2r.$$

Докажем теперь, что для любого соответствия R

$$d_{GH}(X, Y) \leq \frac{1}{2} \inf\{\text{dis}R : R\}.$$

Пусть $\text{dis}R = 2r$. Достаточно доказать, что на дизъюнктном объединении $X \cup Y$ найдется такая полуметрика d , что $d|_{X \times X} = d_X$, $d|_{Y \times Y} = d_Y$ и $\alpha(X, Y) \leq r$ в $(X \cup Y, d)$. Для любых $x \in X$ и $y \in Y$ положим $d(x, y) = \inf\{d_X(x, x') + r + d_Y(y', y) : (x', y') \in R\}$. Расстояния внутри X, Y прежние — d_X и d_Y соответственно. Теперь нетрудно проверить неравенство треугольника и верность неравенства $\alpha(X, Y) < r$. ⊙

Пусть $\varepsilon > 0$. Отображение $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ называется ε -изометрией, если

$$\text{dis}f = \sup\{|d(f(x), f(x')) - |\rho(x, x')|| : x, x' \in X\} \leq \varepsilon$$

и образ $f(X)$ является ε -сетью в Y .

С.14.1 Пусть $(X, \rho), (Y, d)$ метрические пространства и $\varepsilon > 0$. Тогда

(i) если $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, то найдется 2ε -изометрия из X в Y ;

(ii) если найдется ε -изометрия из X в Y , то $d_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon$.

⊙

(i) Пусть R — соответствие между X и Y с $\text{dis}R < 2\varepsilon$. Для каждой точки $x \in X$ выберем такую точку $f(x) \in Y$, что $(x, f(x)) \in R$. Очевидно, полученное отображение обладает свойством

$$\text{dis}f \leq \text{dis}R < 2\varepsilon.$$

Для точки $y \in Y$ рассмотрим такую точку, что $(x, y) \in R$. Точки $y, f(x)$ находятся в соответствии с x . Тогда

$$d(y, f(x)) \leq |xx| + \text{dis}R < 2\varepsilon.$$

Следовательно, $d(y, f(X)) < 2\varepsilon$.

(ii) Пусть для ε -изометрии f

$$R = \{(x, y) \in X \times Y : d(y, f(x)) \leq \varepsilon\}.$$

Множество R является соответствием, т.к. $f(X)$ является ε -сетью в Y . Если $(x, y), (x', y') \in R$, то

$$|d(y, y') - |xx'|| \leq |d(f(x), f(x')) - |xx'|| + d(y, f(x)) + d(y', f(x')) \leq 3\varepsilon.$$

Следовательно, $\text{dis}R \leq 3\varepsilon$, а по предыдущей теореме

$$d_{GH}(X, Y) \leq \frac{3}{2}\varepsilon < 2\varepsilon. \odot$$

Т.14.2 d_{GH} является конечной метрикой на пространстве классов изометричных компактных пространств.

\odot Осталось доказать, что из равенства $d_{GH}(X, Y) = 0$ следует изометричность компактных пространств X и Y . В силу следствия 14.1, найдется такая последовательность отображений $f_n : X \rightarrow Y$, что $\text{dis}f_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Выберем счетное всюду плотное множество $S \subset X$. Используя канторов диагональный процесс, можно найти такую подпоследовательность (f_{n_k}) последовательности (f_n) , что для каждой точки $x \in S$ последовательность $(f_{n_k}(x))$ сходится в Y . Не умаляя общности, можно предположить, что это выполняется для исходной последовательности. Пусть отображение $f : S \rightarrow Y$ является пределом последовательности отображений (f_n) , т.е. для каждого $x \in S$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

В силу того, что для всех $x, x' \in S$

$$|d(f_n(x), f_n(x')) - |xx'|| \leq \text{dis}f_n \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, отображение f сохраняет расстояния. Используя теорему 5.1, продолжим f до сохраняющего расстояния отображения из всего X

в Y . Но существует аналогичное сохраняющее расстояния из Y в X . Следовательно, X и Y изометричны. \odot

Соответствие R ассоциировано с сюръекцией $f : X \rightarrow Y$, если

$$R = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Назовем соответствие R между множествами X и Y выделенным, если оно ассоциировано или с сюръекцией $f : X \rightarrow Y$, или с сюръекцией $g : Y \rightarrow X$.

Задача вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа между конкретными ограниченными метрическими пространствами (X, d_X) и (Y, d_Y) с помощью соответствий обычно приводит к большому объему вычислений, поэтому иногда удобнее ввести более простое расстояние

$$d_s(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R : R \text{ — выделенное соответствие между } X \text{ и } Y \}.$$

Очевидно, что расстояние d_s симметрично и для любых ограниченных метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y)

$$d_{GH}(X, Y) \leq d_s(X, Y).$$

Пусть $\text{card}(S)$ — мощность множества S . Следующее предложение 1 показывает, что это расстояние также как и расстояние Громова–Хаусдорфа удовлетворяет неравенству треугольника.

Т.14.3 Пусть (X, d_X) , (Y, d_Y) и (Z, d_Z) — ограниченные метрические пространства. Тогда имеет место неравенство

$$d_s(X, Y) \leq d_s(X, Z) + d_s(Z, Y).$$

\odot Пусть для определенности существует сюръекция из множества X на множество Y . Тогда достаточно рассмотреть следующие три случая.

1. Пусть существуют сюръекции из множества X на множество Z и из множества Z на множество Y , т.е.

$$\text{card}(X) \geq \text{card}(Z) \geq \text{card}(Y).$$

Представим произвольную сюръекцию $f : X \rightarrow Y$ в виде композиции сюръекций $g : X \rightarrow Z$ и $h : Z \rightarrow Y$. Тогда для любых $x, x' \in X$

$$|d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x'))| \leq |d_X(x, x') - d_Z(g(x), g(x'))| +$$

$$\begin{aligned}
& |d_Z(g(x), g(x')) - d_Y(h(g(x)), h(g(x')))| \leq \\
& \sup\{|d_X(x, x') - d_Z(g(x), g(x'))| : x, x' \in X\} + \\
& \sup\{|d_Z(z, z') - d_Y(h(z), h(z'))| : z, z' \in Z\}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \sup\{|d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x'))| : x, x' \in X\} \leq \\
& \sup\{|d_X(x, x') - d_Z(g(x), g(x'))| : x, x' \in X\} + \\
& \sup\{|d_Z(z, z') - d_Y(h(z), h(z'))| : z, z' \in Z\}.
\end{aligned}$$

Взяв сначала инфимум по всем сюръекциям $f : X \rightarrow Y$ в левой части полученного неравенства, а затем инфимумы по всем сюръекциям $g : X \rightarrow Z$ и $h : Z \rightarrow Y$ в правой части неравенства, получим требуемое неравенство.

2. Пусть существует сюръекция из множества Z на множество X . Таким образом,

$$\text{card}(Z) \geq \text{card}(X) \geq \text{card}(Y).$$

Представим произвольную сюръекцию $h : Z \rightarrow Y$ в виде композиции сюръекций $g : Z \rightarrow X$ и $f : X \rightarrow Y$. Тогда для любых $z, z' \in Z$

$$\begin{aligned}
& |d_X(g(z), g(z')) - d_Y(f(g(z)), f(g(z')))| \leq |d_X(g(z), g(z')) - d_Z(z, z')| + \\
& |d_Z(z, z') - d_Y(h(z), h(z'))| \leq \sup\{|d_Z(z, z') - d_X(g(z), g(z'))| : z, z' \in Z\} + \\
& \sup\{|d_Z(z, z') - d_Y(h(z), h(z'))| : z, z' \in Z\}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \sup\{|d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x'))| : x, x' \in X\} \leq \\
& \sup\{|d_Z(z, z') - d_X(g(z), g(z'))| : z, z' \in Z\} + \\
& \sup\{|d_Z(z, z') - d_Y(h(z), h(z'))| : z, z' \in Z\}.
\end{aligned}$$

Взяв сначала инфимум по всем сюръекциям $f : X \rightarrow Y$ в левой части полученного неравенства, а затем инфимумы по всем сюръекциям $g : Z \rightarrow X$ и $h : Z \rightarrow Y$ в правой части неравенства, получим требуемое неравенство.

3. Пусть существует сюръекция множества Y на множество Z . Таким образом,

$$\text{card}(X) \geq \text{card}(Y) \geq \text{card}(Z).$$

Представим произвольную сюръекцию $g : X \rightarrow Z$ в виде композиции сюръекций $f : X \rightarrow Y$ и $h : Y \rightarrow Z$. Тогда для любых $x, x' \in X$

$$\begin{aligned} |d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x'))| &\leq |d_X(x, x') - d_Z(g(x), g(x'))| + \\ &|d_Z(h(f(x)), h(f(x')))) - d_Y(f(x), f(x'))| \leq \\ &\sup\{|d_X(x, x') - d_Z(g(x), g(x'))| : x, x' \in X\} + \\ &\sup\{|d_Y(y, y') - d_Z(h(y), h(y'))| : y, y' \in Y\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup\{|d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x'))| : x, x' \in X\} &\leq \\ \sup\{|d_X(x, x') - d_Z(g(x), g(x'))| : x, x' \in X\} &+ \\ \sup\{|d_Y(y, y') - d_Z(h(y), h(y'))| : y, y' \in Y\}. \end{aligned}$$

Взяв сначала инфимум по всем сюръекциям $f : X \rightarrow Y$ в левой части полученного неравенства, а затем инфимумы по всем сюръекциям $g : X \rightarrow Z$ и $h : Y \rightarrow Z$ в правой части неравенства, получим требуемое неравенство. \odot

Отметим, что в случае, когда $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$

$$d_s(X, Y) = \frac{1}{2} \inf\{\text{dis } f : f : X \rightarrow Y \text{ — биекция}\},$$

где $\text{dis } f = \sup\{|d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x'))| : x, x' \in X\}$ — *искажение биекции* f . Следовательно, в этом случае верна следующая грубая оценка

$$d_s(X, Y) \leq \frac{1}{2} \max\{|D(X) - m(Y)|, |D(Y) - m(X)|\},$$

где, например, $m(X) = \inf\{|xy| : x, y \in X, x \neq y\}$.

Пр.14.1 Пусть $M = \{0, 1, 2, 10\}$, $W = \{0, 1, 9, 10\}$ подпространства множества вещественных чисел со стандартной метрикой. Тогда нетрудно вычислить, что

$$d_{GH}(M, W) = 0.5 < \alpha(M, W) = 1 < 3.5 = d_s(M, W).$$

Пр.14.2 Пусть A, B — два множества вершин прямоугольников в евклидовой плоскости с длинами сторон a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно и

диагоналями $a_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $b_3 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. Тогда элементарный, но утомительный расчет приведет к равенству

$$d_s(A, B) = \frac{1}{2} \min\{\max\{|a_1 - b_{\sigma(1)}|, |a_2 - b_{\sigma(2)}|, |a_3 - b_{\sigma(3)}|\} : \sigma \in S(3)\},$$

где $S(3)$ — группа всех подстановок трех элементов. Можно также проверить, что $d_{GH}(A, B) = d_s(A, B)$. Уже в этом простом случае проверка ясно покажет, что вычислять $d_{GH}(A, B)$ намного сложнее, чем $d_s(A, B)$.

Пусть $p \in (X, \rho)$. Метрикой Буземана на множестве $CL_0(X)$ всех непустых замкнутых подмножеств пространства X называется функция $\delta_p : CL_0(X) \times CL_0(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\delta_p(M, W) = \sup\{||xM| - |xW||e^{-|px|} : x \in X\}$.

Л.14.2

- (i) Для любого $p \in X$ δ_p — метрика на множестве $CL_0(X)$;
- (ii) для любых $p, q \in X$ метрики δ_p, δ_q липшицево эквивалентны.

⊙ Из неравенств

$$\begin{aligned} \delta_p(M, W) &= \sup\{||xM| - |xW||e^{-|px|} : x \in X\} \leq \\ &\sup\{(|xM| + |xW|)e^{-|px|} : x \in X\} \leq \\ &\sup\{(|pM| + |pW| + 2|px|)e^{-|px|} : x \in X\} \leq |pM| + |pW| + 2 \end{aligned}$$

следует, что величина $\delta_p(M, W)$ конечная. Докажем неравенство треугольника (другие аксиомы определения метрики легко проверяются). Пусть $\varepsilon > 0$, $M, W, L \in CL_0(X)$. Тогда найдется $z \in X$

$$\begin{aligned} \delta_p(M, W) - \varepsilon &\leq ||zM| - |zW||e^{-|pz|} \leq \\ &(|zM| - |zL| + ||zL| - |zW||)e^{-|pz|} \leq \delta_p(M, L) + \delta_p(L, W). \end{aligned}$$

Осталось перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

- (ii) Используя очевидное неравенство

$$e^{-|px|} \leq e^{-|qx|}e^{|pq|},$$

получим требуемые неравенства

$$\delta_p(M, W)e^{-|pq|} \leq \delta_q(M, W) \leq \delta_p(M, W)e^{|pq|}. \odot$$

Доказательство следующей сложной теоремы содержится в [3].

Т.14.4 Если пространство (X, ρ) — собственное, то пространство $(CL_0(X), \delta_p)$ — собственное.

0.15 Верхний угол. Угол. Пространство направлений. Конус

Треугольник $\triangle xyz$ в метрическом пространстве (X, ρ) состоит из трех точек (вершин) x , y и z , соединенных тремя кратчайшими (сторонами): $[x, y]$, $[y, z]$ и $[z, x]$, с длинами $|xy|$, $|yz|$ и $|zx|$ соответственно.

Пусть M_k^2 евклидова плоскость при $k = 0$, плоскость Лобачевского при $k < 0$ и двумерная открытая полусфера при $k > 0$, радиуса $1/\sqrt{k}$.

Для каждого треугольника $\triangle xyz$ в X построим в плоскости M_k^2 *треугольник сравнения* $\triangle \overline{xy}\overline{z}$ с теми же длинами сторон (при $k > 0$ всегда считаем, что периметр $\triangle xyz$ меньше, чем $2\pi/\sqrt{k}$), т.е. $|xy| = |\overline{xy}|$, $|yz| = |\overline{yz}|$ и $|zx| = |\overline{zx}|$. Угол сравнения $\tilde{\angle}xyz$ (или $\tilde{\angle}(x, y, z)$) определяется равенством

$$\tilde{\angle}xyz = \arccos \frac{|xy|^2 + |yz|^2 - |zx|^2}{2|xy||yz|}.$$

Пусть $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow X$, $\gamma' : [0, \varepsilon) \rightarrow X$ — пути в пространстве (X, ρ) , исходящие из одной точки $p = \gamma(0) = \gamma'(0)$. Верхний угол $\angle_{super}(\gamma, \gamma')$ между γ и γ' определяется равенством

$$\angle_{super}(\gamma, \gamma') = \limsup_{s, t \rightarrow 0} \tilde{\angle}(\gamma(s), p, \gamma'(t)),$$

а угол $\angle(\gamma, \gamma')$ между γ и γ' определяется равенством

$$\angle(\gamma, \gamma') = \lim_{s, t \rightarrow 0} \tilde{\angle}(\gamma(s), p, \gamma'(t)),$$

если только этот предел существует.

Доказательства следующих утверждений можно найти в [8], [2].

Л.15.1

- (i) Каждая кратчайшая образует нулевой угол сама с собой;
- (ii) если две кратчайшие $[x, y]$, $[y, z]$ таковы, что их произведение есть кратчайшая $[x, z]$, то угол между $[y, x]$ и $[y, z]$ равен π .

Т.15.1. Пусть три кривые γ_1 , γ_2 и γ_3 исходят из одной точки p . Тогда

- (i) если существуют углы $\alpha_1 = \angle(\gamma_2, \gamma_3)$, $\alpha_2 = \angle(\gamma_1, \gamma_3)$, $\alpha_3 = \angle(\gamma_1, \gamma_2)$, то они удовлетворяют следующему неравенству треугольника $\alpha_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2$;
- (ii) верно неравенство $\angle_{super}(\gamma_1, \gamma_2) \leq \angle_{super}(\gamma_2, \gamma_3) + \angle_{super}(\gamma_1, \gamma_3)$;
- (iii) если z — внутренняя точка кратчайшей $[x, y]$ и углы $\angle uzx$, $\angle uzy$ существуют, то их сумма не меньше, чем π .

Говорят, что кривая γ (с началом в p) имеет направление в точке p , если $\angle_{super}(\gamma, \gamma) = 0$. Две кривые γ_1, γ_2 имеют одинаковое направление в точке p , если угол $\angle_{super}(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ (заметим, что в силу (ii) теоремы 15.1, в этом случае кривые γ_1, γ_2 имеют в точке p направление).

Две кривые из множества всех, имеющих направление в точке p , назовем эквивалентными, если они имеют одинаковое направление. Нетрудно проверить, что это действительно отношение эквивалентности на данном множестве. Класс эквивалентных кривых называется направлением.

Т.15.2 Множество направлений в данной точке образует метрическое пространство, в котором расстояние между двумя направлениями определяется верхним углом между ними.

Конус $Con(X)$ над метрическим пространством (X, ρ) — это результат склеивания в одну точку всех точек слоя $X \times \{0\}$ в прямом произведении $X \times [0, \infty)$. Эта точка называется вершиной конуса.

Расстояние $\rho_c(a, b)$ между точками $a = (x, t)$, $b = (y, s)$ на конусе $Con(X)$ задается следующим образом

$$\rho_c(a, b) = \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts \cos(|xy|)}$$

при $|xy| \leq \pi$,

$$\rho_c(a, b) = t + s$$

при $|xy| \geq \pi$.

Т.15.3

- (i) $(Con(X), \rho_c)$ — метрическое пространство.
- (ii) Метрика ρ_c на $Con(X)$ — внутренняя (строго внутренняя) тогда и только тогда, когда метрика ρ — внутренняя (строго внутренняя) на расстояниях меньших, чем π . Последнее значит, что для любых $x, y \in X$ таких, что $|xy| < \pi$, найдется кривая в X , соединяющая x и y такая, что ее длина сколь угодно близка (равна) $|xy|$.

0.16 β -непрерывность многозначного отображения метрических пространств. Метрическая δ -проекция. Множество существования и чебышевское множество. Аппроксимативная компактность

Отображение $f : (X, \rho) \rightarrow (B(Y), d)$ называется β -непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для каждой последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(f(x_n), f(x)) = 0.$$

β -непрерывное в каждой точке области определения отображение называется β -непрерывным отображением. При замене в этом определении β на α , мы получим определение непрерывности этого отображения относительно псевдометрики α Хаусдорфа.

Л.16.1 β -непрерывное в каждой точке отображение

$f : (X, \rho) \rightarrow (B(Y), d)$ является β -непрерывным на любом компакте $M \subset X$, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, M) > 0$, что $\beta(f(W), f(M)) \leq \varepsilon$ для каждого $W \subset B(M, \delta)$.

⊙ По определению β -непрерывности в произвольной точке $x \in X$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, что $\beta(f(x'), f(x)) < \varepsilon$ для каждого $x' \in B(x, \delta)$. Из покрытия M такими $\delta(\varepsilon, x)$ -шарами выбираем конечное покрытие

$$G = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta(\varepsilon, x_i)),$$

где $x_i \in M$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$. Множество G — открыто, следовательно, множество $X \setminus G$ — замкнуто, причем $\rho(M, X \setminus G) > 0$. Пусть $\delta(\varepsilon, M) = \rho(M, X \setminus G)$ и $W \subset B(M, \delta(\varepsilon, M)) \subset G$ — произвольное подмножество. Тогда по свойствам отклонения Хаусдорфа

$$\begin{aligned} \beta(f(W), f(M)) &\leq \sup\{\inf\{\beta(f(y), f(x)) : x \in M\} : y \in W\} \leq \\ &\sup\{\min\{\beta(f(y), f(x_i)) : i \in \{1, \dots, n\}\} : y \in W\} \leq \varepsilon. \odot \end{aligned}$$

С.16.1 Суперпозиция двух β -непрерывных отображений, в первом из которых любой точке отвечает бикомпакт, является β -непрерывным отображением.

Пусть $\delta \geq 0$, $x \in X$, $M \subset X$, $M \neq \emptyset$.

$$x_M^\delta = \{y \in M : |xy| \leq |xM| + \delta\} \quad (x_M = x_M^0)$$

— метрическая δ -проекция (метрическая проекция) точки x на множество M .

$$P : X \times 2^X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow 2^X, \quad P(x, M, \delta) = x_M^\delta$$

— оператор метрического δ -проектирования (оператор метрического проектирования, если $\delta \equiv 0$). Мы будем использовать также следующие обозначения:

$$P_M(x) = P(M, x) = x_M.$$

Множество $M \subset X$ называется *множеством существования* (чебышевским множеством), если для каждого $x \in X$ $x_M \neq \emptyset$ (x_M — одноточечно). Чебышевское множество M называется *сильно чебышевским*, если отображение P_M — непрерывно.

Последовательность $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в множестве $M \subset X$ называется *минимизирующей последовательностью* для точки $x \in X$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |xy_n| = |xM|.$$

Множество $M \subset X$ называется *аппроксимативно компактным*, если для каждой точки $x \in X$ любая минимизирующая последовательность $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ имеет подпоследовательность, сходящуюся к элементу из M .

Л.16.2

(i) Если M — множество существования, то $M \neq \emptyset$ — замкнутое множество и для каждого $x \in X$ x_M — замкнутое множество.

(ii) Если M — аппроксимативно компактное множество, то M — множество существования и для каждого $x \in X$ x_M — компактное множество.

(iii) Если M — аппроксимативно компактное множество, то метрическая проекция $P_M : X \rightarrow 2^X$ является β -непрерывным отображением.

⊙ (i) Пусть $x \in \overline{M}$ и $y \in x_M$. Тогда $|xy| = |xM| = 0$. Следовательно, $\overline{M} = M$. Пусть $x \in X$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность в x_M , сходящаяся к точке $y \in X$. Тогда

$$|xy| = \lim_{n \rightarrow \infty} |xy_n| = |xM|$$

и $y \in \overline{M} = M$. Таким образом, $y \in x_M$ и x_M — замкнутое множество.

(ii) Пусть $x \in X$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — минимизирующая последовательность для точки $x \in X$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |xy_n| = |xM|.$$

Тогда найдется подпоследовательность такая $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ последовательности $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = y \in M.$$

Кроме того,

$$|xy| = \lim_{m \rightarrow \infty} |xy_m| = |xM|.$$

Следовательно, $y \in x_M$ и M — множество существования. В силу доказанного утверждения (i), множества M , x_M замкнуты. Следовательно, x_M — компактное множество.

(iii) Докажем методом от противного. Пусть последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к точке $x \in X$, но

$$\beta(P_M(x_n), P_M(x))$$

не сходится к нулю. Тогда найдутся число $a > 0$, подпоследовательность $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, точка $z_m \in P_M(x_m)$ для каждого $m \in \mathbb{N}$ такие, что начиная с некоторого номера $m_0 \in \mathbb{N}$ $|z_m P_M(x)| > a$. Докажем, что последовательность $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ минимизирующая для точки x . Переходя в неравенствах

$$|xM| \leq |xz_m| \leq |xx_m| + |x_m z_m| = |xx_m| + |x_m M| \leq 2|xx_m| + |xM|$$

к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |xz_m| = |xM|.$$

В силу аппроксимативной компактности множества M , найдется подпоследовательность $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset (z_m)_{m \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторой точке $z \in P_M(x)$. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k P_M(x)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |z_k z| = 0.$$

Получили противоречие. \odot

С.16.2 Метрическая проекция на аппроксимативно компактное чебышевское множество непрерывна.

3.16.1 Пусть M — непустое замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Тогда метрическая проекция произвольной точки $x \in X$ на множество M состоит не более чем из одной точки.

3.16.2 Используя задачу 1.1, докажите, что непустое замкнутое выпуклое множество M в гильбертовом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ является чебышевским множеством.

0.17 Непрерывность метрической δ -проекции и β -непрерывность обратного отображения

Установим сначала факт непрерывности метрической δ -проекции.

Л.17.1 Пусть $x \in (X, \rho)$, $M \subset X$ — компактно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n x| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(M_n, M) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0,$$

где для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\delta_n \geq 0$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(P_n(x_n, M_n, \delta_n), P(x, M)) = 0.$$

В случае, когда $\delta_n \equiv 0$ считается, что для каждого

$$n \in \mathbb{N} \quad P_n(x_n, M_n, \delta_n) \neq \emptyset.$$

⊙ Докажем методом от противного. Пусть утверждение неверно. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что для бесконечной последовательности индексов n (можно считать, для всех индексов) найдутся такие

$$q_n \in P_n(x_n, M_n, \delta_n) \cap (X \setminus B(P(x, M), \varepsilon)),$$

что множество предельных точек последовательности $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не пересекается с открытым шаром $B(P(x, M), \varepsilon)$. С другой стороны, для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $z_n \in M$, что $|z_n q_n| \leq 2\alpha(M_n, M)$. Следовательно, множество предельных точек последовательности $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ совпадает с непустым множеством предельных точек последовательности $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$q_n \in B[x_n, |x_n M_n| + \delta_n] \subset B[x_n, |x M| + \alpha(M_n, M) + |x x_n| + \delta_n]$$

$$\subset B[x, |xM| + \alpha(M_n, M) + 2|xx_n| + \delta_n].$$

Тогда непустое множество предельных точек последовательности $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ принадлежит шару $B[x, |xM|]$, а следовательно и множеству

$$P(x, M) = M \cap B[x, |xM|].$$

Получили противоречие. \odot

Пр.17.1 При выполнении условий леммы 2.1 сходимость по Хаусдорфу может отсутствовать. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ $M_n = M$, $\delta_n \equiv 0$,

$$X = \mathbb{R}^2, M = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \leq 0\},$$

$x_0 = (0; 0)$, $x_n = (1/n; 0)$. Тогда

$$P(x_n, M) = \{(0; 1), (0; -1)\}, P(x_0, M) = M$$

и для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\beta(P(x_n, M), P(x, M)) = \beta(\{(0; 1), (0; -1)\}, M) = 0$,

$$\alpha(P(x_n, M), P(x, M)) = \beta(M, P(x_n, M)) = \sqrt{2}.$$

В случае, когда X — линейное нормированное пространство, приведем без доказательства один из результатов А. В. Маринова о непрерывности метрической δ -проекции. Для геодезических пространств специального типа существуют аналогичные результаты, но их описание выходит за рамки этого пособия.

Т.17.1 Пусть M — выпуклое множество линейного нормированного пространства X , $x, y \in X$, $N \subset X$, $\varepsilon, \delta > 0$. Тогда выполняется неравенство :

$$\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq \left(\frac{2|xM|}{\varepsilon} + 1\right)(|\varepsilon - \delta| + 2|xy| + 3\alpha(M, N)).$$

Если оба множества M, N выпуклы, $\varepsilon, \delta \geq 0$, $\mu = \max(\varepsilon, \delta) > 0$, то

$$\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq \left(\frac{2 \min\{|xM|, |yN|\}}{\mu} + 1\right)(|\varepsilon - \delta| + 2|xy| + 3\alpha(M, N)).$$

В следующей лемме рассмотрена β -непрерывность обратного отображения.

Л.17.2 Пусть $A : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ — замкнутый оператор с областью определения $D(A)$, $\hat{M} \subset X$ компакт, $M = D(A) \cap \hat{M} \neq \emptyset$, $y \in A(M)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n y| = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \beta(M_n, M) = 0,$$

где для каждого $n \in \mathbb{N}$ $M_n \subset D(A)$ и $y_n \in A(M_n)$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(B_n(y_n), B(y)) = 0,$$

где $B : A(M) \rightarrow M$, $B_n : A(M_n) \rightarrow M_n$ — обратные отображения для A и $A|_{M_n}$ соответственно.

⊙ Докажем методом от противного. Пусть утверждение неверно. Тогда найдутся такие $y \in A(M)$, $\varepsilon > 0$ и бесконечные последовательности объектов, удовлетворяющих условиям леммы 17.2, для которых

$$B_n(y_n) \cap (X \setminus B(B(y), \varepsilon)) \neq \emptyset$$

при $n \geq 1$. Взяв прообразы при $n \geq 1$

$$x_n \in B_n(y_n) \setminus B(B(y), \varepsilon),$$

убеждаемся, что множество предельных точек последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не принадлежит шару $B(B(y), \varepsilon)$. С другой стороны, $x_n \in M_n \subset B(M, 2\beta(M_n, M))$. Следовательно, можно найти $z_n \in M \cap B(x_n, 2\beta(M_n, M)) \subset \hat{M}$. В силу компактности \hat{M} , множество предельных точек последовательности $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ непусто. Тогда непусто и множество предельных точек последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(M_n, M) = 0$. Пусть x — предельная точка последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Упрощая обозначения, можно считать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n x| = 0, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A).$$

Тогда $A(x_n) = y_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но оператор A замкнут, следовательно, $x \in D(A)$ и $x \in M$. Таким образом, $A(x) = y$ и $x \in B(y)$. Получили противоречие. ⊙

С.17.1 Если оператор A биективен на M , то при выполнении остальных условий леммы 17.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(B_n(y_n), B(y)) = 0.$$

Если же оператор A биективен на X , то имеет место обычная сходимость.

0.18 Метрическая δ -проекция и ε -квазирешение операторного уравнения первого рода

Операторным уравнением первого рода называется уравнение вида $Ax = y$, $x \in X$, $y \in (Y, d)$, где X — топологическое пространство. Требуется по заданному элементу y найти решение — элемент x .

Если обратный оператор A^{-1} неограничен, то решение x неустойчиво относительно погрешности задания элемента y , т.е. малые изменения правой части приводят к большим изменениям решения.

Пусть $M \subset X$. Элемент $x' \in M$ называется ε -квазирешением операторного уравнения первого рода на множестве $M \subset X$ при $\varepsilon \geq 0$, если

$$d(Ax', y) \leq \inf\{d(Au, y) + \varepsilon : u \in M\}.$$

Если $\varepsilon = 0$, то ε -квазирешение называется *квазирешением или обобщенным решением*, при этом неравенство можно заменить равенством. Другими словами, элемент x' минимизирует *невязку* $d(Au, y)$ уравнения первого рода на множестве M с погрешностью, не превосходящей заданного $\varepsilon \geq 0$. Совокупность всех ε -квазирешений уравнения первого рода на множестве M обозначается $Q(y, A, M, \varepsilon)$. Найдем связь между совокупностью всех ε -квазирешений уравнения первого рода, метрической ε -проекцией и обратным оператором.

Л.18.1 Пусть $Ax = y$ — операторное уравнение первого рода, где $x \in X$, $y \in (Y, d)$ и X — топологическое пространство. Тогда для всех $\emptyset \neq M \subset X$, $\varepsilon \geq 0$ имеет место равенство

$$Q(y, A, M, \varepsilon) = R_M \circ P(y, A(M), \varepsilon),$$

где $R_M : A(M) \rightarrow 2^M$, $R_M = M \cap A^{-1}(y)$. В частности, при $X = (Y, d)$

$$Q(x, id, M, \varepsilon) = P(x, M, \varepsilon).$$

⊙ Утверждение следует из следующих импликаций

$$\begin{aligned} z \in Q(y, A, M, \varepsilon) &\Leftrightarrow z \in M, d(Az, y) \leq \inf\{d(Au, y) + \varepsilon : u \in M\} \Leftrightarrow \\ Az \in B[y, \inf\{d(Au, y) + \varepsilon : u \in M\}] \cap A(M) &\Leftrightarrow z \in R_M \circ P(y, A(M), \varepsilon). \end{aligned} \odot$$

Замечание 18.1 Преимуществом ε -квазирешений является их существование и эффективная вычислимость.

Пусть каждому элементу $y \in (Y, d)$ отвечает единственное решение $x = R_M(y) = M \cap A^{-1}(y)$. Задача определения решения $x = R_M(y)$ из X по исходным данным $y \in Y$ называется *устойчивой на пространствах* $(X, \rho), (Y, d)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $|x_1 x_2| \leq \varepsilon$ при $d(y_1, y_2) \leq \delta$, где $x_i = R_M(y_i)$, $y_i \in Y$, $x_i \in X$, $i = 1, 2$. Эта задача называется *корректно поставленной по Адамару на паре метрических пространств* $((X, \rho), (Y, d))$, если удовлетворяются требования :

(i) для каждого $y \in Y$ существует единственное решение $x \in X$, т.е. $Ax = y$;

(ii) задача устойчива на пространствах (X, Y) .

Если одно из этих условий не выполнено, то задача называется некорректно поставленной.

Эта же задача называется *корректной по Тихонову*, если

(i) известно, что для точного значения $y = y_T$ существует единственное решение x_T уравнения $Ax_T = y_T$, принадлежащее заданному компакту $M \subset X$ (т.е. $x_T \in M$);

(ii) и если вместо элемента y_T известен такой элемент y_δ , что $d(y_T, y_\delta) \leq \delta$ и $y_\delta \in A(M)$ при $\delta \geq 0$, то в качестве приближенного решения операторного уравнения с правой частью $y = y_\delta$ можно взять $x_\delta = A^{-1}(y_\delta)$ (т.е. при $\delta \rightarrow 0$ $y_\delta \in A(M)$ и $x_\delta \rightarrow x_T$).

Т.18.1 Если уравнение $Ax = y$ может иметь на компакте M не более одного решения и проекция каждого элемента $y \in Y$ на множество $A(M)$ единственна, то квазирешение этого уравнения единственно и непрерывно зависит от правой части y .

⊙ Пусть \hat{x} — квазирешение и $\hat{y} = A\hat{x}$. Тогда

$$d(A\hat{x}, y) \leq \inf\{d(Au, y) : u \in M\}.$$

Следовательно, $\hat{y} = y_{A(M)}$. В силу биективности $A : M \rightarrow A(M)$, квазирешение $\hat{x} = A^{-1}\hat{y} = A^{-1}y_{A(M)}$ единственно. Кроме того, оператор A^{-1} непрерывен на $A(M)$ и оператор проектирования P непрерывен на Y . Следовательно, оператор $A^{-1} \circ P$ непрерывен на Y и квазирешение \hat{x} непрерывно зависит от правой части y ⊙

Замечание 18.2 Теорему 18.1 можно доказать без условия единственности, если понимать непрерывность множества квазирешений в смысле непрерывности многозначных отображений.

Пусть $m \in (X, \rho)$. Для заданных на m операторов $A_1, A_2 : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ определим расстояние

$$\rho_m(A_1, A_2) = \sup \left\{ \frac{d(A_1x, A_2x)}{|x\theta|} : x \in m \right\},$$

где $\theta \in X$ фиксированный элемент. Наряду с точным уравнением $Ax = y$, $y \in Y$ и множеством его квазирешений $Q = Q(y, A, M)$ на $M \subset X$, рассмотрим приближенные уравнения $A_nx = y_n$, $y_n \in Y$, $n \geq 1$ и $Q(y_n, A_n, M_n)$ на $M_n \subset X$, $n \geq 1$. Операторы A, A_n определены на

$$m = \bigcup_{n \geq 1} M_n \bigcup M$$

и действуют в пространство (Y, d) .

Т.18.2 Пусть $M \in (X, \rho)$ — компакт, оператор $A : X \rightarrow (Y, d)$ непрерывен на множестве

$$m = \bigcup_{n \geq 1} M_n \bigcup M, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_m(A_n, A) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(M_n, M) = 0.$$

Тогда при непустых $Q_n = Q(y_n, A_n, M_n)$ ($n \geq 1$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(Q_n, Q) = 0.$$

$\odot A(M)$ — компакт, т.к. M — компакт и оператор A непрерывен. Тогда $P(y, A(M)) \neq \emptyset$ — компакт и существует квазирешение операторного уравнения. Пусть $x_n \in Q_n$ приближенное квазирешение при $n \geq 1$. Тогда $d(y_n, A_n(M_n)) = d(y_n, A_nx_n)$. Кроме того, при $n \geq 1$

$$\begin{aligned} d(y_n, Ax_n) &\leq d(y_n, A_nx_n) + d(Ax_n, A_nx_n) = d(y_n, A_n(M_n)) + d(Ax_n, A_nx_n) \leq \\ &d(y_n, A(M_n)) + \beta(A(M_n), A_n(M_n)) + d(Ax_n, A_nx_n). \end{aligned}$$

Следовательно, $Ax_n \in P(y_n, A(M_n), \eta_n)$, где

$$\eta_n = d(Ax_n, A_nx_n) + \beta(A(M_n), A_n(M_n)), n \geq 1.$$

Множество m можно считать ограниченным, поскольку M — компакт и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(M_n, M) = 0.$$

Тогда найдется такая константа $R > 0$, что для каждого $x \in m$ $|x\theta| \leq R$ и для каждого $n \geq 1$ $d(Ax_n, A_n x_n) \leq r_n R$, где $r_n = \rho_m(A_n, A)$. Теперь для каждого $n \geq 1$ нетрудно получить, что $\beta(A(M_n), A_n(M_n)) \leq r_n R$ и $\eta_n \leq 2r_n R$. Тем самым доказано, что для каждого $n \geq 1$

$$A(Q_n) \subset P(y_n, A(M_n), 2r_n R).$$

Применяя к этому включению обратный оператор $B : A(M_n) \rightarrow M_n$, получим для каждого $n \geq 1$ включение $Q_n \subset B \circ P(y_n, A(M_n), 2r_n R)$. Из леммы 1.1, непрерывности оператора A и условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(M_n, M) = 0$$

следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(A(M_n), A(M)) = 0.$$

Теперь, применяя лемму 18.1 и следствие 18.1, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(B \circ P(y_n, A(M_n), 2r_n R), B \circ P(y, A(M))) = 0,$$

где $B : A(M) \rightarrow M$ — обратный оператор. Это тем более справедливо для меньших множеств Q_n , $n \geq 1$. \odot

0.19 Наилучшее аппроксимирующее множество. Относительные чебышевский центр и чебышевский радиус. Множество диаметральных точек непустого ограниченного множества метрического пространства

Пусть Σ — семейство непустых подмножеств в пространстве (X, ρ) . Множество $S^* \in \Sigma$ называется *наилучшим аппроксимирующим множеством* из семейства Σ для множества $M \in B(X)$, если

$$\beta(M, S^*) = R_\Sigma(M), \text{ где } R_\Sigma(M) = \inf\{\beta(M, S) : S \in \Sigma\}.$$

Пусть $N \in \mathbb{N}$. Назовем число

$$R_{NW}(M) = \inf\{\beta(M, S) : S \subset W, 1 \leq \text{card}(S) \leq N\}$$

относительным N -радиусом множества $M \in B(X)$ относительно непустого множества $W \subset X$. При $N = 1$ говорят об *относительном чебышевском радиусе* множества и обозначают его

$$R_W(M) = \inf\{\beta(M, x) : x \in W\}.$$

Если $W = X$, то $R_{NX}(M)$ — *наилучший радиус аппроксимации* множества $M \in B(X)$ N -сетями пространства X . При $N = 1$ говорят о *чебышевском радиусе* множества $M \in B(X)$ и обозначают его $R(M) = R_X(M)$.

Наилучшей N -сетью множества $M \in B(X)$ называется такое множество $S_{NX}^*(M) \subset X$, что

$$1 \leq \text{card}(S_{NX}^*(M)) \leq N \quad \text{и} \quad \beta(M, S_{NX}^*(M)) = R_{NX}(M).$$

При $N = 1$ говорят о *чебышевском центре* множества $M \in B(X)$.

$Z_W(M) = \{x \in W : \beta(M, x) = R_W(M)\}$ — *множество всех относительных чебышевских центров* множества M .

$Z(M) = Z_X(M)$ — *множество всех чебышевских центров* множества M .

$H(M) = \{x \in M : \beta(M, x) = D(M)\}$ — *множество диаметральных точек* множества M .

Кроме того, используем обозначения $R_0(M) = R_M(M)$, $Z_0(M) = Z_M(M)$.

Оценим сверху разность между относительными N -радиусами двух ограниченных множеств с помощью отклонений между рассматриваемыми множествами. Тогда в качестве следствия получим оценку этой разности с помощью расстояний по Хаусдорфу между рассматриваемыми множествами.

Т.19.1 Пусть $M, W, A, B \in B(X)$. Тогда

$$(i) \quad |R_{NW}(M) - R_{NB}(A)| \leq \max\{\beta(M, A) + \beta(B, W), \beta(A, M) + \beta(W, B)\}$$

для каждого $N \in \mathbb{N}$;

$$(ii) \quad R_W(M) \leq R(M) + |Z(M)W| \quad \text{при} \quad Z(M) \neq \emptyset;$$

$$(iii) \quad R_W(M) \leq R_0(M) + |Z_0(M)W| \quad \text{при} \quad Z_0(M) \neq \emptyset;$$

$$(iv) |R_{\Sigma}(M) - R_{\Sigma}(W)| \leq \alpha(M, W).$$

⊙ (i) Выберем произвольно $S_B \subset B$, где $1 \leq \text{card}(S_B) \leq N$ и запишем неравенство треугольника для отклонения Хаусдорфа

$$\beta(M, S_B) \leq \beta(M, A) + \beta(A, S_B).$$

Взяв инфимум по всем $S_B \subset B$ ($1 \leq \text{card}(S_B) \leq N$) сначала в левой части, а затем в правой части этого неравенства, получим следующее неравенство

$$R_{NB}(M) \leq \beta(M, A) + R_{NB}(A). \quad (*)$$

Докажем вспомогательное равенство

$$\beta(S_B, W) = \inf\{\beta(S_B, S) : S \subset W, 1 \leq \text{card}(S) \leq N\}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Для каждого $y \in S_B$ найдется такой элемент $w_y \in W$, что

$$|yw_y| < |yW| + \varepsilon.$$

Тогда $1 \leq \text{card}(S_W) \leq N$, где $S_W = \{w_y : y \in S_B\}$. Кроме того, для каждого $y \in S_B$

$$|yS_W| \leq |yw_y| < |yW| + \varepsilon \leq \beta(S_B, W) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\beta(S_B, S_W) \leq \beta(S_B, W) + \varepsilon.$$

Требуемое равенство можно теперь получить, если в следующих неравенствах

$$\beta(S_B, W) \leq \inf\{\beta(S_B, S) : S \subset W, 1 \leq \text{card}(S) \leq N\} \leq$$

$$\beta(S_B, S_W) \leq \beta(S_B, W) + \varepsilon$$

перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Используем полученное равенство для доказательства еще одного вспомогательного неравенства

$$R_{NW}(M) \leq \beta(B, W) + R_{NB}(M). \quad (**)$$

Действительно, если в правой части неравенств

$$R_{NW}(M) = \inf\{\beta(M, S) : S \subset W, 1 \leq \text{card}(S) \leq N\} \leq$$

$$\beta(M, S_B) + \inf\{\beta(S_B, S) : S \subset W, 1 \leq \text{card}(S) \leq N\} =$$

$$\beta(M, S_B) + \beta(S_B, W) \leq \beta(M, S_B) + \beta(B, W)$$

взять инфимум по всем $S_B \subset B$ ($1 \leq \text{card}(S_B) \leq N$), то получим неравенство (**). Используя доказанные неравенства (*) и (**), получим

$$R_{NW}(M) - R_{NB}(A) \leq R_{NW}(M) - R_{NB}(M) + R_{NB}(M) - R_{NB}(A) \leq \beta(B, W) + \beta(M, A),$$

Из полученного неравенства и произвольности $M, W, A, B \in B(X)$ следует требуемое неравенство (i).

(ii) Для любых $y \in Z(M)$, $x \in W$ верно неравенство

$\beta(M, x) \leq \beta(M, y) + |yx|$. Тогда из этого неравенства и определений $R(M)$, $Z(M)$ следует, что

$$R_W(M) \leq \beta(M, y) + |yW| = R(M) + |Z(M)W|.$$

(iii) Для любых $y \in Z_0(M)$, $x \in W$ верно неравенство

$\beta(M, x) \leq \beta(M, y) + |yx|$. Тогда из этого неравенства и определений $R_0(M)$, $Z_0(M)$ следует, что

$$R_W(M) \leq \beta(M, y) + |yW| = R_0(M) + |Z_0(M)W|.$$

(iv) Пусть $x \in M$ и $\tau > 0$. Тогда найдется точка $z \in W$ такая, что $|xz| \leq |xW| + \tau$. Кроме того, получим неравенства

$$|xS| \leq |xz| + |zS| \leq |xW| + |zS| + \tau \leq$$

$$\sup_{x \in M} |xW| + \sup_{z \in W} |zS| + \tau \leq \alpha(M, W) + \sup_{z \in W} |zS| + \tau$$

для $S \in \Sigma$. Отсюда следует, что

$$\inf_{S \in \Sigma} \sup_{x \in M} |xS| \leq \alpha(M, W) + \sup_{z \in W} |zS| + \tau.$$

Переходя к точной нижней грани в правой части и используя произвольность выбора $\tau > 0$, получим

$$R_\Sigma(M) = \inf_{S \in \Sigma} \sup_{x \in M} |xS| \leq \alpha(M, W) + \inf_{S \in \Sigma} \sup_{z \in W} |zS| = \alpha(M, W) + R_\Sigma(W).$$

Неравенство $R_\Sigma(W) \leq \alpha(M, W) + R_\Sigma(M)$ получается аналогично. \odot

С.19.1 Пусть $M, W, A, B \in B(X)$. Тогда

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} |R_{NW}(M) - R_{NB}(A)| \leq \alpha(M, A) + \alpha(W, B);$$

$$|R_0(M) - R_0(A)| \leq \beta(M, A) + \beta(A, M) \leq 2\alpha(M, A).$$

3.19.1 Если $M \in B(X)$, то условие а) $H(M) = M$ равносильно условию б) $Z_0(M) = M$. Из этих условий следует, что в) $R_0(M) = D(M)$. Если M — компакт, то условия а), б), в) равносильны.

3.19.2 Пусть $M \in B(X)$. Если $M \cap Z(M) \neq \emptyset$, то $Z_0(M) = M \cap Z(M)$, $R_0(M) = R(M)$.

3.19.3 Пусть $M, W, T \in B(X)$. Тогда $R_W(M) \leq R_T(M) + R_W(T)$ и $\theta : B(X) \times B(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\theta(M, W) = \max\{R_W(M), R_M(W)\}$ — функция, удовлетворяющая неравенству треугольника, а также неравенствам $\alpha(M, W) \leq \theta(M, W) \leq D(M, W) = \sup\{|xy| : x \in M, y \in W\}$.

3.19.4 Для любых $M, W \in B[X]$ множество $Z_W(M)$ ($H(M)$) замкнуто в множестве W (M) с индуцированной метрикой.

0.20 Наилучшая N -сеть непустого ограниченного множества сопряженного пространства

N -сетью пространства X называется непустое множество, состоящее не более чем из N точек. Обозначим через Σ_N множество всех N -сетей пространства (X, ρ) . Радиусом покрытия множества $M \in B(X)$

N -сетью $S \in \Sigma_N$ называется число $\beta(M, S)$. При $\Sigma = \Sigma_N$, $M \in B(X)$ используем обозначение $R_N(M) = \inf\{\beta(M, S) : S \in \Sigma_N\}$. Наиболее общая теорема, в которой устанавливаются достаточные условия для существования наилучшей N -сети непустого ограниченного множества сопряженного пространства доказана Гаркави А. Л. (в случае метрического пространства такие условия пока (2008 г.) не известны).

Т.20.1 Если пространство $(X, \|\cdot\|)$ является сопряженным к некоторому нормированному пространству \hat{X} , то для каждого $M \in B(X)$ найдется наилучшая N -сеть.

⊙ Для последовательности положительных вещественных чисел $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем такую N -сеть $S^n = \{y_1^n, \dots, y_N^n\}$, что

$$\beta(M, S^n) \leq R_N(M) + \varepsilon_n.$$

При этом для всех $k \in \{1, \dots, N\}$, $n \in \mathbb{N}$ нормы элементов $\|y_k^n\|$ ограничены некоторой константой $A > 0 : \|y_k^n\| \leq A$. Пусть

$B^{(1)}[0, A], \dots, B^{(N)}[0, A]$ — N экземпляров замкнутого шара пространства X . В произвольном шаре из этого набора зададим окрестность точки x_0 неравенствами $|f_m(x - x_0)| < \varepsilon$, где m принадлежит конечному подмножеству множества \mathbb{N} , $f_m \in \hat{X}$ и $f_m(x) = x(f_m)$. Тем самым, в этом шаре индуцируется слабая топология, относительно которой он компактен по теореме Банаха-Алаоглу. Следовательно, множество

$$Q = B^{(1)}[0, A] \times \dots \times B^{(N)}[0, A]$$

компактно по теореме Тихонова и для последовательности

$(u_n) = ((y_1^n, \dots, y_N^n))$ найдется предельная точка $u^* = (y_1^*, \dots, y_N^*) \in Q$. Кроме того, для каждого $x \in M$

$$\|x - y_{k_n}^n\| \leq R_N(M) + \varepsilon_n,$$

где $k_n = k_n(x) \in \{1, \dots, N\}$. Предположим, что N -сеть $S^* = \{y_1^*, \dots, y_N^*\}$ не является наилучшей. Тогда найдутся такие точка $x \in M$ и число $\alpha > 0$, что для всех $k \in \{1, \dots, N\}$

$$\|x - y_k^*\| > R_N(M) + \alpha.$$

Кроме того, найдутся такие элементы $f_1, \dots, f_N \in \hat{X}$, что для всех $k \in \{1, \dots, N\}$

$$\|f_k\| = 1, |f_k(x) - f_k(y_k^*)| > R_N(M) + \alpha.$$

С другой стороны, найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что для всех $n > m$

$$|f_k(x) - f_k(y_k^*)| \leq |f_k(x) - f_k(y_{k_n}^n)| + |f_k(y_{k_n}^n) - f_k(y_k^*)| \leq$$

$$\|x - y_{k_n}^n\| + |f_k(y_{k_n}^n) - f_k(y_k^*)| \leq R_N(M) + \varepsilon_n + |f_k(y_{k_n}^n) - f_k(y_k^*)|.$$

Зададим окрестность $O(u^*)$ точки u^* неравенствами $|f_k(y) - f_k(y_k^*)| < \alpha/2$ при $k = 1, \dots, N$. В силу того, что u^* — предельная точка последовательности (u_n) , найдется такое $n_0 > m$, что $u_{n_0} \in O(u^*)$, т.е.

$$|f_k(y_{k_0}^{n_0}) - f_k(y_k^*)| < \alpha/2$$

при $k = 1, \dots, N$. Тогда, полагая $k_{n_0} = k_0 \in \{1, \dots, N\}$, получим

$$|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y_{k_0}^*)| \leq |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y_{k_0}^{n_0})| + |f_{k_0}(y_{k_0}^{n_0}) - f_{k_0}(y_{k_0}^*)| \leq R_N(M) + \alpha.$$

Получили противоречие. \odot

3.20.1 Найти наилучшую N -сеть для круга евклидовой плоскости.

3.20.2 Найти $Z_0(S)$, где S — 3-сеть евклидовой плоскости.

3.20.3 Найти наилучшую 2-сеть для эллипса евклидовой плоскости.

3.20.4 Найти наилучшую 2-сеть для прямоугольника евклидовой плоскости.

0.21 Достаточные условия существования и единственности чебышевского центра непустого ограниченного множества

Для формулировки достаточных условий существования и единственности чебышевского центра непустого ограниченного множества введем несколько условий.

A. Для любых $x, y \in (X, \rho)$ существует единственная точка $\omega(x, y) \in X$ такая, что

$$|x\omega(x, y)| = |y\omega(x, y)| = |xy|/2.$$

B₁. Для всех $p, x, y \in (X, \rho)$ верно неравенство

$$|p\omega(x, y)| \leq \max\{|px|, |py|\}.$$

B₂. Отображение $\omega : X \times X \rightarrow X$ равномерно непрерывно на каждом множестве $B \times B$, где B — произвольный замкнутый шар пространства (X, ρ) .

C₁. Для каждого $r > 0$ и для любых ограниченных последовательностей $(p_n), (x_n), (y_n)$ в пространстве (X, ρ) таких, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$|p_n x_n| \leq r, \quad |p_n y_n| \leq r, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |p_n \omega(x_n, y_n)| = r$$

верно равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n| = 0$.

C₂. Для каждого $r > 0$, для каждой сходящейся к нулю последовательности неотрицательных вещественных чисел (ε_n) и для любых ограниченных последовательностей $(p_n), (x_n), (y_n)$ в пространстве (X, ρ) таких, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$|p_n x_n| \leq r + \varepsilon_n, \quad |p_n y_n| \leq r + \varepsilon_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |p_n \omega(x_n, y_n)| = r$$

верно равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n| = 0$.

Примерами полных метрических пространств, в которых выполнены условия (A) , (B_1) , (B_2) , (C_2) , являются равномерно выпуклое банахово пространство и пространство Адамара (в частности, пространство Лобачевского). Напомним, что полное метрическое пространство (X, ρ) называется *пространством Адамара*, если для любых $x, y \in X$ найдется такое $m \in X$, что для любого $z \in X$

$$|xy|^2 + 4|zm|^2 \leq 2(|xz|^2 + |yz|^2).$$

Т.21.1 Для каждого непустого ограниченного множества метрического пространства, удовлетворяющего условиям (A) , (B_1) , (C_1) , существует не более одного чебышевского центра.

⊙ Пусть x, y чебышевские центры множества $M \in B(X)$. Тогда из определения чебышевского центра и условий (A) , (B_1) следует, что верны неравенства

$$\sup_{u \in M} |\omega(x, y)u| \leq \sup_{u \in M} \max\{|xu|, |yu|\} \leq R(M).$$

Тогда $\omega(x, y)$ — чебышевский центр множества M и из определения чебышевского центра следует, что в множестве M найдется такая последовательность (p_n) , что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n \omega(x, y)| = R(M), |p_n x| \leq R(M), |p_n y| \leq R(M).$$

В силу условия (C_1) , получим $x = y$. ⊙

Т.21.2 Для каждого непустого ограниченного множества полного метрического пространства, удовлетворяющего условиям (A) , (B_1) , (C_2) , существует единственный чебышевский центр.

⊙ Для множества $M \in B(X)$ рассмотрим семейство непустых замкнутых множеств

$$K_\varepsilon(M) = \{y \in X : \beta(M, y) \leq R(M) + \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$.

Это семейство обладает следующими элементарными свойствами :

а) если $\alpha \leq \varepsilon$, то $K_\alpha(M) \subset K_\varepsilon(M)$;

b) $\cap\{K_\varepsilon(M) : \varepsilon > 0\}$ есть множество всех чебышевских центров множества M .

По теореме 21.1 существует не более одного чебышевского центра множества M . Выберем сходящуюся к нулю последовательность положительных вещественных чисел (ε_n) и для каждого $n \in \mathbb{N}$ такие точки $x_n, y_n \in K_{\varepsilon_n}(M)$, что

$$\text{diam}(K_{\varepsilon_n}(M)) \leq |x_n y_n| + \varepsilon_n.$$

В силу условий (A) , (B_1) , определения чебышевского радиуса и множества $K_\varepsilon(M)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ получим

$$R(M) \leq \sup_{z \in M} |z\omega(x_n, y_n)| \leq \sup_{z \in M} \max\{|zx_n|, |zy_n|\} \leq R(M) + \varepsilon_n. \quad (1)$$

Следовательно, в множестве M найдется такая последовательность (z_n) , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n \omega(x_n, y_n)| = R(M). \quad (2)$$

Теперь, в силу условия (C_2) , получим $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n| = 0$. Тогда по теореме Кантора множество $\cap\{K_\varepsilon(M) : \varepsilon > 0\}$ состоит из одной точки. \odot

Т.21.3 Для каждого непустого ограниченного множества полного метрического пространства, удовлетворяющего условиям (A) , (B_1) , (B_2) , (C_1) , существует единственный чебышевский центр.

\odot Начало доказательства этой теоремы совпадает с доказательством теоремы 6.2 за исключением последнего равенства. Рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{N}$ такие точки u_n, v_n в сегментах $[z_n, x_n]$, $[z_n, y_n]$, что

$$|u_n x_n| = \mu_n |z_n x_n|, \quad |v_n y_n| = \mu_n |z_n y_n|,$$

где

$$\mu_n = \frac{\varepsilon_n}{R(M) + \varepsilon_n}.$$

Используя эти равенства и неравенства (1) получим для каждого $n \in \mathbb{N}$ вспомогательные неравенства

$$|u_n x_n| \leq \varepsilon_n, \quad |y_n v_n| \leq \varepsilon_n, \quad |z_n u_n| \leq R(M), \quad |z_n v_n| \leq R(M).$$

В свою очередь, из этих неравенств, определений точек u_n, v_n , равенства (2) и условия (B_2) , получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n \omega(u_n, v_n)| = R(M).$$

Следовательно, в силу условия (C_1) ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n v_n| = 0.$$

Из этого равенства и неравенств

$$|x_n y_n| \leq |x_n u_n| + |u_n v_n| + |v_n y_n| \leq 2\varepsilon_n + |u_n v_n|$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$ получим $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n| = 0$. Тогда по теореме Кантора множество $\cap \{K_\varepsilon(M) : \varepsilon > 0\}$ состоит из одной точки. \odot

3.21.1 *Найти чебышевский центр для треугольника и четырехугольника евклидовой плоскости.*

0.22 Наилучшие аппроксимирующие компакты и чебышевские центры выпуклых множеств специальных геодезических пространств

T.22.1 *Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (A) , (B_1) , (B_2) , (C_1) . Тогда каждое выпуклое замкнутое множество является аппроксимативно компактным, сильно чебышевским множеством.*

\odot Докажем аппроксимативную компактность множества M . Пусть $p \in X \setminus M$, (x_n) — минимизирующая последовательность в множестве M и $y_n = [p, x_n] \cap S(p, pM)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (|x_n p| - |p y_n|) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|x_n p| - |pM|) = 0.$$

Из условия (B_2) следует, что $|\omega(x_n, x_m)\omega(y_n, y_m)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$. Кроме того, $\omega(y_n, y_m) \in B[p, pM]$, $\omega(x_n, x_m) \in M$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, поскольку M , $B[p, pM]$ — выпуклые множества. Пусть для всех $n, m \in \mathbb{N}$

$$a_{nm} \in S(p, pM) \cap [\omega(x_n, x_m), \omega(y_n, y_m)].$$

Тогда

$$|pM| - |\omega(y_n, y_m)a_{nm}| = |pa_{nm}| - |\omega(y_n, y_m)a_{nm}| \leq |p\omega(y_n, y_m)| \leq |pM|$$

и значит, $|p\omega(y_n, y_m)| \rightarrow |pM|$ при $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$.

Из условия (C_1) получим $|y_n y_m| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$. Но пространство X — полное, поэтому найдется такая точка $y \in S(p, |pM|)$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Из неравенства $|yx_n| \leq |x_n y_n| + |yy_n|$ следует теперь, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y \in M \cap S(p, |pM|).$$

Значит, множество M — аппроксимативно компактно. Пересечение $M \cap S(p, |pM|)$ содержит не более одной точки. Действительно, в противном случае сфера содержала бы невырожденный отрезок, поскольку множества $M, B[p, |pM|]$ выпуклые. Тогда в силу условия (C_1) мы получили бы противоречие. Следовательно, множество M чебышевское. Осталось использовать следствие 1.2. \odot

В дальнейшем вместо $\bigcup_{x \in W} P_M(x)$ будем писать $P_M(W)$, где $\emptyset \neq W \subset X$. Нам понадобится еще одно условие на пространство (X, ρ)

(D) Для каждого $x \in (X, \rho)$ и для любой точки p из произвольного сегмента $[u, v] \subset X$ верно неравенство $|pP_{[u,v]}(x)| \leq |px|$.

Л.22.1 Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям $(A), (B_1), (B_2), (C_1), (D)$, W — непустое множество в X , M — непустое замкнутое ограниченное выпуклое множество в X . Тогда имеют место неравенства :

- (i) $|xP_M(W)| \leq |xW|$ для каждого $x \in M$;
- (ii) $\beta(M, P_M(W)) \leq \beta(M, W)$.

\odot (i) Из теоремы 7.1 и условий леммы 7.1 следует, что оператор P_M является однозначным и непрерывным в пространстве X . Выберем произвольно $x \in M, y \in W$. Тогда найдется единственная точка $y_1 = P_M(y)$. В силу выпуклости множества $M, [x, y_1] \subset M$. Тогда, используя условие (D) , получим, что

$$|xP_M(y)| = |xP_{[x,y_1]}(y)| \leq |xy|.$$

Следовательно, $|xP_M(W)| \leq |xy|$ и $|xP_M(W)| \leq |xW|$.

(ii) Неравенство (ii) доказывается переходом к точной верхней грани по всем $x \in M$ сначала в правой части неравенства (i), а затем в левой части полученного неравенства. \odot

С.22.1 Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (A) , (B_1) , (B_2) , (C_1) , (D) , Z — наилучшее аппроксимирующее множество из семейства Σ для непустого замкнутого ограниченного выпуклого множества $M \subset X$ и $P_M(Z) \in \Sigma$. Тогда $P_M(Z)$ — наилучшее аппроксимирующее множество для множества M .

Л.22.2 Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (A) , (B_1) , (B_2) , (C_1) , (D) , $M \in B(X)$. Тогда существует единственный чебышевский центр множества M , принадлежащий замыканию выпуклой оболочки множества M , совпадающий с чебышевскими центрами замыкания выпуклой оболочки множества M и выпуклой оболочки множества M .

⊙ Существование и единственность чебышевского центра $Chab(M)$ непустого ограниченного множества M следует из теоремы 22.3, а из условий (A) , (B_1) следует, что замкнутые шары пространства X выпуклые. Тогда

$$M \subset C(M) \subset \overline{C(M)} \subset B[Chab(M), R(M)] \Rightarrow \\ R(M) = R(C(M)) = R(\overline{C(M)}).$$

Из Следствия 22.1 и единственности чебышевского центра следует, что

$$Chab(M) \subset \overline{C(M)}, Chab(M) = Chab(C(M)) = Chab(\overline{C(M)}). \odot$$

3.22.1 Пространство Адамара удовлетворяет условиям (A) , (B_1) , (B_2) , (C_1) , (D) .

0.23 Непрерывность метрической проекции.

Свойства близкие к β -непрерывности множества всех относительных чебышевских центров, множества диаметральных точек и наилучших аппроксимирующих компактов

Л.23.1 Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (A) , (B_1) , (B_2) , (C_1) , (D) , M — непустое ограниченное замкнутое выпуклое множество пространства X , (W_n) — последовательность непустых ограниченных замкнутых множеств пространства X ,

сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторому компактному $W \subset X$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(P_M(W_n), P_M(W)) = 0.$$

⊙ Из теоремы 22.1 и условий леммы 23.1 следует, что M является аппроксимативно компактным, сильно чебышевским множеством. Кроме того, в силу утверждения (iii) леммы 16.2, оператор P_M является β -непрерывным на компакте $W \subset X$, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(P_M(W_n), P_M(W)) = 0.$$

Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(P_M(W), P_M(W_n)) = 0$$

методом от противного. Пусть это утверждение неверно, тогда найдутся константа $c > 0$ и подпоследовательность $(W_m) \subset (W_n)$ такие, что $\beta(P_M(W), P_M(W_m)) > c$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, найдется последовательность $(z_m) \subset W$ такая, что $|P_M(z_m)P_M(W_m)| > c$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, найдется подпоследовательность $(z_k) \subset (z_m)$, сходящаяся к некоторой точке $z \in W$, так как W — компактно. Но оператор P_M является непрерывным, поэтому найдется такое число $k_0 \in \mathbb{N}$, что $|P_M(z)P_M(W_k)| > c$ для каждого $k > k_0$. Из условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(W_k, W) = 0$$

следует, что найдется последовательность (y_k) , $y_k \in W_k$, сходящаяся к точке z . Но тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |P_M(z)P_M(W_k)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |P_M(z)P_M(y_k)| = 0.$$

Получили противоречие. ⊙

Т.23.1 Пусть X — метрическое пространство, $M, M_n \in K(X)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(M_n, M) = 0.$$

Тогда найдется такая подпоследовательность $(M_k) \subset (M_n)$, что

$$(i) \lim_{k \rightarrow \infty} \beta(Z_0(M_k), Z_0(M)) = 0;$$

$$(ii) \lim_{k \rightarrow \infty} \beta(H(M_k), H(M)) = 0.$$

⊙ Из задачи 19.4 и компактности множеств M, M_n следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такой элемент $z_n \in Z_0(M_n)$ ($z_n \in H(M_n)$), что

$$|z_n Z_0(M)| = \beta(Z_0(M_n), Z_0(M)) \quad (|z_n H(M)| = \beta(H(M_n), H(M))).$$

(i) Тогда $\alpha(M_n, z_n) = \beta(M_n, z_n) = R_0(M_n)$. Используя условия теоремы, найдем такие подпоследовательность $(z_k) \subset (z_n)$ и элемент $z \in M$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k z| = 0.$$

Тогда, в силу следствия 19.1 и непрерывности метрики α , получим $\beta(M, z) = \alpha(M, z) = R_0(M)$. Следовательно, $z \in Z_0(M)$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta(Z_0(M_k), Z_0(M)) = \lim_{k \rightarrow \infty} |z_k Z_0(M)| = 0.$$

(ii) Тогда $\alpha(M_n, z_n) = \beta(M_n, z_n) = D(M_n)$. Используя условия теоремы, найдем такие подпоследовательность $(z_k) \subset (z_n)$ и элемент $z \in M$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k z| = 0.$$

Тогда, в силу утверждения (v) теоремы 4.1 и непрерывности метрики α , получим $\beta(M, z) = \alpha(M, z) = D(M)$. Следовательно, $z \in H(M)$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta(H(M_k), H(M)) = \lim_{k \rightarrow \infty} |z_k H(M)| = 0. \odot$$

Пр.23.1. Рассмотрим в евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 3-сети

$$S = \{O(0; 0), A(1/2; \sqrt{3}/2), B(-1/2; \sqrt{3}/2)\},$$

$$S_n = \{C_n(0; 1/n), A(1/2; \sqrt{3}/2), B(-1/2; \sqrt{3}/2)\},$$

где $n \in \{2, 3, \dots\}$. Тогда нетрудно проверить, что при $n \in \{2, 3, \dots\}$

$$\alpha(S_n, S) = 1/n, \quad Z_0(S) = H(S) = S, \quad Z_0(S_n) = \{C_n\}, \quad H(S_n) = \{A, B\},$$

$$\alpha(Z_0(S_n), Z_0(S)) = |BC_n|, \quad \alpha(H(S_n), H(S)) = 1.$$

Таким образом, в теореме 23.1, в общем случае, нельзя заменить отклонение β на метрику Хаусдорфа.

Л.23.2 Пусть X — равномерно выпуклое банахово пространство и множества $M, W \in B(X)$ такие, что $\text{Cheb}(M) \in \overline{C(M)}$,

$$\text{Cheb}(W) \in \overline{C(W)}, \quad B(\text{Cheb}(M), R(M)) \cap B(\text{Cheb}(W), R(W)) = \emptyset.$$

Тогда

$$|\text{Cheb}(M)\text{Cheb}(W)| \leq 2\alpha(M, W).$$

⊙ Отметим, что условие $\text{Cheb}(M) \in \overline{C(M)}$ для $M \in B(X)$ автоматически выполнено для вещественного гильбертова пространства, в силу леммы 7.2, или двумерного равномерно выпуклого банахова пространства X . Пусть для определенности $R(W) \leq R(M)$. Тогда

$$\begin{aligned} |\text{Cheb}(M)\text{Cheb}(W)| &= |\text{Cheb}(M)B[\text{Cheb}(W), R(W)]| + R(W) \leq \\ &\sup\{|xB[\text{Cheb}(W), R(W)]| : x \in \overline{C(M)}\} + R(W) = \\ &\sup\{|xB[\text{Cheb}(W), R(W)]| : x \in \overline{M}\} + R(W) \leq 2\alpha(M, W). \odot \end{aligned}$$

Но отображение Cheb в общем случае не является липшицевым.

Л.23.3 Пусть $N > 2$, X — евклидово пространство (пространство Лобачевского) размерности больше единицы и U — окрестность $\Sigma_2(X)$ в пространстве $(\Sigma_N(X), \alpha)$. Тогда

- (i) отображение $\text{cheb} : (U, \alpha) \rightarrow X$ не является липшицевым;
- (ii) в евклидовом случае отображение $\text{cheb} : (\Sigma_N(X), \alpha) \rightarrow X$ не является равномерно непрерывным.

⊙ Нетрудно понять, что доказательство достаточно изложить в случае плоскости при $N = 3$. Пусть x, y — две различные точки в евклидовой плоскости (плоскости Лобачевского) и S_+ — половина окружности, построенная на отрезке $[x, y]$ как на диаметре. Определим переменную точку $z \in S_+$ такую, что $|yz| \in (0, |xy|/2)$. Затем найдем точку u , удовлетворяющую условиям : а) $z \in [x, u]$; б) точка y принадлежит окружности, построенной на отрезке $[x, u]$ как на диаметре. Рассмотрим 3-сети $M = \{x, y, z\}$, $Z = \{x, y, u\} \in \Sigma_3(X) \setminus \Sigma_2(X)$ в евклидовой плоскости (плоскости Лобачевского). Тогда, очевидно, $v = \text{cheb}(M) = \omega(x, y)$, $w = \text{cheb}(Z) = \omega(x, u)$ и $|uz| = \alpha(M, Z)$. В евклидовой плоскости для каждой константы $L > 0$ уточним положение точки $z \in S_+$, подчинив ее дополнительно условию $2L|yz| < |xy|$. Тогда нетрудно получить $|\text{cheb}(M)\text{cheb}(Z)| = |vw| = (|xy|)(|uz|)/(2|zy|) > L|uz| = L\alpha(M, Z)$. Отсюда следует верность леммы 23.3 в случае евклидового пространства. Пусть p — основание перпендикуляра, проведенного из точки v к отрезку $[x, w]$, и ψ — угол при вершине w треугольника Δxvw в плоскости Лобачевского. По построению треугольники Δxvw , Δwrv — прямоугольные. Следовательно, имеют место формулы $\tanh |pv| = \sinh |pw| \tan \psi$, $\tanh |vx| = \sinh |vw| \tan \psi$.

Тогда отношение $\sinh |vw|/\sinh |pw| = \tanh |vx|/\tanh |pv|$ стремится к ∞ при $(|pv| \rightarrow 0)$. Но тогда отношение $|\text{cheb}(M)\text{cheb}(Z)|/\alpha(M, Z) = |vw|/(2|pw|)$ также стремится к ∞ при $(|pv| \rightarrow 0)$. Отсюда следует верность леммы 23.3 и в случае пространства Лобачевского. \odot

Т.23.2 Пусть (M_n) — последовательность непустых ограниченных замкнутых множеств пространства (X, ρ) . Тогда

А. Если $M \in \Sigma$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(M_n, M) = 0,$$

$(K_n) \subset \Sigma$ — последовательность наилучших аппроксимирующих множеств для последовательности (M_n) такая, что для каждого натурального n $K_n \subset M_n$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(K_n, M) = 0;$$

В. Если M — компакт в X ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(M_n, M) = 0,$$

(S_N^n) — последовательность наилучших N -сетей для последовательности (M_n) такая, что для каждого натурального n $S_N^n \subset M_n$, то найдется подпоследовательность последовательности (S_N^n) , сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторой наилучшей N -сети множества M .

\odot А. Из условий теоремы 23.2 и утверждения (iv) теоремы 19.1 нетрудно получить :

$$\beta(K_n, M) \leq \beta(M_n, M) \leq \alpha(M_n, M),$$

$$\beta(M, K_n) \leq \beta(M, M_n) + \beta(M_n, K_n) = \beta(M, M_n) + R_\Sigma(M_n) \leq 2\alpha(M, M_n)$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(K_n, M) = 0.$$

В. Из условий теоремы 23.2 следует, что найдется такая подпоследовательность

$$(S_N^m = \{y_1^m, \dots, y_N^m\}) \subset (S_N^n),$$

что существуют пределы

$$y_i^* = \lim_{m \rightarrow \infty} y_i^m \quad (1 \leq i \leq N).$$

Пусть $S_N^* = \{y_1^*, \dots, y_N^*\}$. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$\beta(M, S_N^*) \leq \beta(M, M_m) + \beta(M_m, S_N^m) + \beta(S_N^m, S_N^*) \leq$$

$$\alpha(M, M_m) + R_N(M_m) + \beta(S_N^m, S_N^*).$$

Из условия теоремы, утверждения (iv) теоремы 19.1 и определения N -сети S_N^* следует, что правая часть полученного неравенства стремится к $R_N(M)$ при $(m \rightarrow \infty)$. Следовательно, S_N^* является наилучшей N -сетью для множества M . \odot

Следствие 23.1 (теоремы 23.2 и следствия 22.1) Пусть X — полное метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (A) , (B_1) , (B_2) , (C_1) , (D) , (M_n) — последовательность непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств пространства X , сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторому компакту $M \subset X$. Тогда

А. Если (K_n) — последовательность наилучших аппроксимирующих компактов для последовательности (M_n) , то найдется подпоследовательность $(M_m) \subset (M_n)$, для которой найдется последовательность (\hat{K}_m) наилучших аппроксимирующих компактов, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к множеству M ;

В. Если (S_N^n) — последовательность наилучших N -сетей для последовательности (M_n) , то найдется подпоследовательность $(M_m) \subset (M_n)$, для которой найдется последовательность (\hat{S}_N^m) наилучших N -сетей, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторой наилучшей N -сети множества M .

Литература

1. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. - Москва-Ленинград: Гостехиздат. - 1948. - 387 с.
2. Александров А. Д., Залгаллер В. А. Двумерные многообразия ограниченной кривизны. (Основы внутренней геометрии поверхностей). - Тр. матем. ин-та им. Стеклова. LXIII. - Москва-Ленинград: Изд-во АН СССР. - 1962. - 263 с.
3. Буземан Г. Геометрия геодезических. - М.: Физматгиз. - 1962. - 503 с.

4. Busemann H., Phadke B. B. Spaces with Distinguished Geodesics. - New York - Basel - Marsel Dekker Inc. - 1987. - 159 p.
5. Ballman W. Lectures on spaces of nonpositive Curvature. DMV Seminar 25. Birkhauser. -1995. - 112 p.
6. Bridson M. R., Haefliger A. Metric spaces of non-positive curvature. Ser. A Series of Comprehensive Stadies in Mathematics. Vol. 319. - Berlin: Springer-Verlag. - 1999. - 643 p.
7. Gromov M. Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Progress in Mathematics 152. Birkhauser. Boston. -1999. - 578 p.
8. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. - Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований. - 2004. - 496 с.
9. Papadopoulos A. Metric spaces convexity and nonpositive curvature. - Zurich: European Math. Society. - 2005. - 287 p.
10. Куратовский К. Топология. – М.: Мир, 1966. - Т. 1. - 594 с.
11. Белобров П.К. О чебышевской точке системы множеств // Изв. вузов. Математика. - 1966. - No. 6. - С. 18 - 24.
12. Власов Л.П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Успехи матем. наук. - 1973. - Т.28. - Вып.6 (174). - С.3-66.
13. Гаркави А.Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи матем. наук. - 1964. - Т. 19. - Вып. 6. - С. 139 - 145.
14. Гаркави А. Л. О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве // Изв. АН СССР. Серия матем. - 1962. - Т. 26. - No. 1. - С. 87 - 106.
15. Diestel J. Geometry of Banach Spaces. LNM485. Springer-Verlag, 1975.
16. Engelking R., General topology, Moscow, "Mir"Publishing House, 1986. (Russian)

17. Лисковец О.А. Некорректные задачи и устойчивость квазирешений // Сиб. мат. ж. - 1969. - Т.10. - No.2. - С.373 - 385.
18. Маринов А.В. Устойчивость ε -квазирешений операторных уравнений 1 рода // Приближение функций полиномами и сплайнами : Сб. статей / АН СССР. УНЦ. - Свердловск : УНЦ АН СССР. - 1985. - С. 105 - 117.
19. Сосов Е.Н. Об аппроксимативных свойствах множеств в специальном метрическом пространстве // Известия вузов. Математика. - 1999. - No. 6. - С. 81 - 84.
20. Sosov E.N. On existence and uniqueness of Chebyshev center of a bounded set in a special geodesic space // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2000. - Vol. 7. - P. 43 - 46.
21. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. - М.: Изд-во Московского ун-та. - 1976.